



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA**

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**El análisis de convergencia en los modelos de crecimiento
económico endógeno. Una aplicación de las ecuaciones integro-
diferenciales de Volterra.**

**Trabajo de tesis para obtener el grado de
Maestro en Ciencias**

Presenta el Licenciado en Economía

Fabián David Martínez Valdes

**Director de Tesis
Dr. Joaquin Delgado Fernandez
Georgina Alenka Gúzman Chávez**

Índice general

Introducción	4
1. Modelos de crecimiento económico	
1.1. El modelo neoclásico de crecimiento	7
1.1.1. La contabilidad del crecimiento	8
1.1.2. El modelo de crecimiento Solow-Swan	10
1.1.3. La convergencia.....	17
1.1.3.1 La beta convergencia	18
1.1.3.2 El catch-up tecnológico	22
1.1.3.3 La sigma convergencia	23
1.2. La nueva teoría de crecimiento.....	24
1.2.1. Los modelos de crecimiento endógeno.....	26
1.2.2. Crecimiento económico endógeno y learning-by-doing.....	34
2. Crecimiento endógeno con dinámica tecnológica	
2.1. Modelo $\hat{A}kp$	38
3. Fundamentos de la teoría de las ecuaciones integrales	
3.1. Aspectos fundamentales a considerar en la teoría de las ecuaciones integrales.....	43
3.2. Las ecuaciones integrales (EIV) e integro-diferenciales de Volterra (EIDV).....	61
3.2.1 Relaciones entre ecuaciones integrales y diferenciales	
3.2.2 Algunas Conexiones entre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y las EIV.....	68
3.3. Soluciones y comportamiento de las soluciones de una EIDV.....	74
4. Solución al modelo $\hat{A}kp$	91
4.1. Introducción.....	91
4.2. Transición hacia la convergencia cuando $p=C$	93
4.3. Transición hacia la convergencia cuando $p=p(t)$	96
4.4. El análisis optimo neoclásico: el hamiltoniano.....	96
CONCLUSIONES	
BIBLIOGRAFÍA	99

Introducción

Quizá una de las contribuciones más importantes a la moderna teoría del crecimiento económico es de Robert Solow y Trevor Swan en 1956. En dicha propuesta, el aspecto clave del modelo es la función de producción de corte neoclásico. En esta función de producción se asume retornos constantes a escala en la producción, rendimientos decrecientes para cada uno de los insumos involucrados así como la posibilidad de sustitución entre insumos (elasticidad de sustitución) y tasa de ahorro es constante. Se da por hecho que no existe una dinámica tecnológica, esta es una constante en la función de producción e indica el nivel de la misma. Este modelo predice lo que se conoce en la literatura como *convergencia absoluta* y *convergencia condicional*. La primera indica entre menor sea el nivel de PIB per cápita inicial respecto de su equilibrio de largo plazo (estado estable) más rápido crece la economía hacia los niveles per cápita de las demás economías independientemente de ahorro y producción. En el caso de la segunda, aunque los países con menor capital por trabajador tienden a crecer a una mayor tasa que los más avanzados, se habla de convergencia condicional porque los niveles de estado estable del capital y de producto por trabajador dependen de la tasa de ahorro, el crecimiento de la población, la depreciación y el parámetro tecnológico (elementos todos exógenos) de la función de producción. Tales características varían a lo largo de los países. Otro aspecto de suma relevancia, es que en ausencia de innovación tecnológica el crecimiento económico en el largo plazo debe cesar. Esta última es tal vez la mayor deficiencia del modelo de Solow-Swan. Para solucionar esta falla se asumió que el progreso tecnológico ocurre de manera exógena. Entonces la tasa de crecimiento del PIB per cápita en el largo plazo depende únicamente del parámetro tecnológico en la función de producción.

Este aspecto de la modelación en la moderna teoría del crecimiento es en el que nos enfocamos en esta investigación. La tecnología y el capital se relacionan de manera que el progreso tecnológico de una economía depende en buena medida de la historia de esta relación. Aún cuando el parámetro tecnológico en la función de producción sea una constante esta relación puede no ser trivial. Hablar de una teoría del progreso tecnológico en la corriente neoclásica encuentra contradicciones. El avance en la tecnología lleva a la creación de nuevo conocimiento. Si este aspecto se convierte en un factor de producción la idea de retornos a escala constantes debe abandonarse. No puede sostenerse el marco neoclásico de competencia perfecta en donde no existe motivación para la innovación. En esta disyuntiva Kenneth Arrow en 1962 propone unos modelos en donde se describe un mecanismo conocido como *learning by doing*. Los descubrimientos e innovaciones, esto es, el nuevo conocimiento se derrama (*spill over*) a toda la economía y un proceso de difusión del conocimiento debido a que este es un bien no rival. Apoyándose en lo construido por Arrow, en 1986 Paul Romer propone un modelo donde el crecimiento es sostenido en el largo plazo debido entre otras razones a que el capital se considera en un sentido más amplio que en Solow-Swan, para incluir el capital humano por ejemplo. Entonces la característica de rendimientos decrecientes del capital a lo largo del tiempo no necesariamente se cumple. En estas nuevas contribuciones al estado del arte los determinantes endógenos de la tasa de crecimiento de largo plazo son fundamentales, más que los aspectos externos como el ciclo de negocios o las consecuencias de una política

monetaria o fiscal. En la literatura de crecimiento económico se conocen como *modelos de crecimiento endógeno*.

Tanto en los modelos exógenos como en los endógenos modelar la tecnología se remite a una constante. Medir el nivel de tecnología es un asunto algo obscuro en la teoría actual. Fagerberg en 1987 entre otros propone utilizar las estadísticas de patentes como indicador del grado de avance tecnológico. La pregunta que surge es ¿Como llevar este concepto a los modelos de crecimiento? Nuestra propuesta retoma una idea planteada por Vito Volterra.

La ecuación integral

$$W(t) = kP + \int_{t_0}^t H(t,s)P(s)ds$$

es un ejemplo propuesto por Vito Volterra¹ para resolver el problema de la torsión de una cuerda. Una primera aproximación al problema considera que la relación entre la pareja de torsión P y el ángulo de torsión, W , es la ecuación lineal

$$W(t) = kP$$

donde k es constante. La ecuación anterior es un modelo que considera que el comportamiento futuro depende solamente de la posición de P en t_0 , es decir únicamente del estado presente. Sin embargo para Volterra el cuerpo elástico ha experimentado fatiga de previas distorsiones y por lo tanto ha *heredado*, de alguna manera características del pasado. Para modelar lo anterior él consideró que el efecto hereditario podría ser una integral que suma las contribuciones para un periodo de tiempo $[t_0, t]$, como en (1), donde $H(t,s)$ el kernel de la ecuación integral es el coeficiente de herencia. En concreto, el futuro se determina por dos aspectos: el estado en el tiempo presente más las contribuciones de la herencia del pasado. La trayectoria del nivel de patentes a lo largo de un periodo de tiempo se explica entonces por el nivel de patentes en el periodo t , la posición de $p(t)$ en el presente más la trayectoria de la correlación patentes y otros factores en el tiempo. El comportamiento de la solución de la ecuación integral de Volterra determinará la trayectoria de las patentes.

En este trabajo nos ocuparemos de las consecuencias de modelar así el progreso de la tecnología e introducirlo en los modelos de crecimiento y realizar el análisis de convergencia típico en esas investigaciones. La organización de este trabajo es la siguiente. En el capítulo I profundizamos en el estudio de la teoría del crecimiento en sus dos principales vertientes: exógena y endógena. Se revisan los modelos más representativos en la literatura. El capítulo II presenta nuestra alternativa al modelado de la tecnología. Lo hemos llamado modelo $\hat{A}kp$ con los modelos de crecimiento endógeno. En el capítulo III se presenta una introducción a la teoría de las ecuaciones integrales. La relación entre estas y las ecuaciones diferenciales ordinarias es tratada en este capítulo como un paso indispensable para entender el comportamiento de las soluciones de una ecuación integro-diferencial. El capítulo IV cierra esta investigación proponiendo una solución al modelo $\hat{A}kp$ y realizando el análisis de convergencia.

¹ Volterra, Vito. “*Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*”. Paris 1913.

CAPÍTULO 1

Modelos de crecimiento económico

Entender los factores que determinan el crecimiento económico es uno de los debates que más interesa en la ciencia Económica desde hace años. Debido a que un alto crecimiento económico representa incrementos en los beneficios de un país y altos niveles de vida para la población. Resulta de suma relevancia conocer los factores que estimulan ó retrasan tal crecimiento. Una de las preguntas que surge es si existe la convergencia en el producto per cápita, esto es, ¿la brecha existente entre países ricos y pobres puede reducirse en el tiempo?, una respuesta afirmativa indicaría que un país con bajo PIB per cápita puede alcanzar los estándares de vida de los más ricos como por ejemplo los Estados Unidos. Para que esto suceda los ricos deben crecer más lentamente que los pobres, permitiendo a estos últimos alcanzar a los primeros. Si la respuesta es negativa y la brecha se amplía en el tiempo, los ricos serán más ricos y los pobres más pobres. Entender las diferencias en el crecimiento a través de los países es uno de los retos más importantes en Economía.

Los economistas clásicos discutieron el asunto de los determinantes del crecimiento de manera extensiva; sin embargo ellos se enfocaron principalmente en la acumulación de capital y relegaron el rol de la tecnología. El modelo neoclásico de crecimiento desarrollado por R. Solow en 1956² incorpora el rol de la tecnología por medio del progreso técnico. Esto permite el crecimiento a largo plazo, pero asume el progreso técnico exógeno al modelo. Por su construcción el modelo de Solow no explica el progreso técnico. Es entonces que autores como Romer³ (1986; 1990; 1994), Lucas⁴ (1988), Rebelo⁵ y otros desarrollan una nueva teoría de crecimiento, en donde el progreso técnico es endógeno al modelo.

1.1. El modelo neoclásico de crecimiento

Un importante cambio en el análisis del crecimiento económico surge en 1956 con Solow⁶ y Swan⁷. Estos modelos describen el desempeño de importantes variables económicas en el tiempo, tales como el producto per cápita, el capital y la tasa de ahorro. Se basan en supuestos neoclásicos tales como competencia perfecta, capital y producto homogéneo, rendimientos constantes a escala, perfecta sustitución entre factores y productividad del trabajo y capital decrecientes. Su principal resultado es que la tasa de crecimiento del producto declina

² Solow, R.M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 1956, pp. 65-94

³ Romer 1986, 1990 y 1994

⁴ Lucas 1988

⁵ Rebelo

⁶ Solow, R., M., Op. Cit. 1956

⁷ Swan, T.W., "Economic Growth and Capital Accumulation", *The Economic Record*, 1956, pp. 334-361.

conforme el ingreso, la acumulación de capital (parte del ingreso se ahorra a cierta tasa constante) y el consumo per cápita crecen a una tasa constante (steady state). Esto implica que los países con bajos niveles de producto per cápita (pobres) crecen más rápido que los países ricos y por lo tanto su nivel de producto en el largo plazo converge al de los países más ricos. En resumen el modelo de Solow implica convergencia en el producto. En el largo plazo el crecimiento en el producto per cápita es enteramente determinado por el progreso técnico, el cual se asume exógeno en el modelo. La tecnología es tratada como un bien público, esto es, libre de cargo. El modelo neoclásico de crecimiento predice que en el largo plazo, los países alcanzan su “steady state” y las diferencias en el producto a través de los países se debe a las diferencias en los determinantes del “steady state”, esto es, la acumulación de capital físico y humano. Las diferencias en las tasas de crecimiento son temporales y las naciones crecen a diferentes tasas en el proceso hacia el equilibrio de largo plazo. En aquellas naciones que poseen la misma tecnología y tasa de crecimiento poblacional se espera eventualmente convergencia a la misma tasa de crecimiento de “steady state”, aunque sus niveles de producto no necesariamente son iguales. Por tanto, si la tecnología es asumida a ser un bien público, se esperaría que todos los países alcancen la misma tasa de crecimiento de “steady state” en el largo plazo.

1.1.1. La contabilidad del crecimiento

El modelo de Solow pronostica que a largo plazo la producción por trabajador depende en exclusiva del progreso técnico. Sin embargo en el corto plazo esto puede depender tanto del progreso técnico como de la acumulación e capital. De esta manera la determinación de las fuentes de crecimiento económico en el corto plazo es un asunto empírico. La contabilidad del crecimiento⁸ es una herramienta para resolver la cuantificación de la contribución de cada factor productivo al crecimiento global experimentado por la economía.

La contabilidad del crecimiento permite expresar la variación en el tiempo de la cantidad observada del producto (bienes y servicios), en las variaciones porcentuales que experimenta el producto al cambiar la dotación de factores productivos y en un factor residual que comprende el progreso técnico y otros elementos⁹.

Partiendo de la función de producción¹⁰

$$Y = f(K(t), A(t)L(t)) \quad (1.1)$$

el término $A(t)$ de la función representa todos los elementos que influyen en la determinación de $Y(t)$, además de $K(t)$ (el stock de capital) y $L(t)$ (la cantidad de trabajo).

Si derivamos la ecuación (1.1) con respecto al tiempo,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial f(K, AL)}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\partial f(K, AL)}{\partial AL} \frac{dAL}{dt}$$

⁸ (Abramovitz 1956) (Solow 1957)

⁹ En Z. Griliches, “The Simon Kuznets Memorial Lecture” (paper, Harvard University, octubre 1997) se encuentra un enfoque histórico acerca del residuo de Solow. Revisar bibliografía.

¹⁰ La hipótesis básica del modelo indica que la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala. Ver apéndice A para más detalles de la función de producción.

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial f(K, AL)}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\partial f(K, AL)}{\partial A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial f(K, AL)}{\partial L} \frac{dL}{dt} \quad (1.2)$$

Si $\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$, $\dot{K} = \frac{dK}{dt}$ y $\dot{L} = \frac{dL}{dt}$ al dividir por Y , tenemos que

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\partial f(K, AL)}{\partial K} \frac{K}{f(K, AL)} \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\partial f(K, AL)}{\partial A} \frac{A}{f(K, AL)} \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial f(K, AL)}{\partial L} \frac{L}{f(K, AL)} \frac{\dot{L}}{L} \quad (1.3)$$

Por otro lado como

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} \text{ y } \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L}$$

son respectivamente los productos marginales de los factores capital y trabajo, por lo tanto

$$\alpha_K = \frac{\partial f}{\partial K} \frac{K}{f} \text{ y } \alpha_L = \frac{\partial f}{\partial L} \frac{L}{f}$$

representan las elasticidades de la producción con respecto al capital y al trabajo respectivamente y

$$R(t) \equiv \frac{\partial f}{\partial A} \frac{A}{f} \frac{\dot{A}}{A}$$

La ecuación del crecimiento se convierte finalmente en

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha_K \frac{\dot{K}}{K} + \alpha_L \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\partial f}{\partial A} \frac{A}{f} \frac{\dot{A}}{A} \quad (1.4)$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha_K \frac{\dot{K}}{K} + \alpha_L \frac{\dot{L}}{L} + R(t) \quad (1.5)$$

Donde $\alpha_K + \alpha_L = 1$ y la tasa de crecimiento del progreso técnico, $\gamma_A = \dot{A}/A$, viene dada a partir de la ecuación (1.7) de la siguiente manera:

$$R(t) = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha_K \frac{\dot{K}}{K} - \alpha_L \frac{\dot{L}}{L} \quad (1.6)$$

$$\alpha_A \gamma_A = \gamma_Y - (\alpha_K \gamma_K + \alpha_L \gamma_L) \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) expresa lo mismo que en (1.6) (el residuo $R(t)$) pero en tasas de crecimiento. La tasa de crecimiento del progreso técnico es la diferencia entre la tasa de crecimiento del producto y la contribución al crecimiento del capital y el trabajo en la

producción. En (1.6) el remanente es interpretado como una medida de la contribución del progreso técnico al crecimiento del producto. Sin embargo lo que en verdad parece (de acuerdo a (1.7)) es la contribución de toda aquello a excepción de la contribución del capital y el trabajo.

1.1.2. El modelo de crecimiento de Solow-Swan

Los supuestos del modelo de Solow y Swan son

I) **La función de producción neoclásica**¹¹,

$$Y = f(K(t), A(t)L(t)) \quad (1.8)$$

Donde A, el nivel de la tecnología, está expresada en sentido amplio. El producto AL se conoce como trabajo efectivo. El progreso así incorporado se conoce como aumentador de trabajo o neutral en el sentido de Harrod.

El supuesto de rendimientos positivos y decrecientes de los factores productivos implica $0 < \alpha < 1 < 1$ y $0 < (1 - \alpha) < 1$. Los rendimientos constantes a escala en la función de producción significa que $(\alpha) + (1 - \alpha) = 1$.

Esta función agregada se supone ser *idéntica* para todas las regiones o países estudiados, la dotación inicial de tecnología está dada.

II) **Tasa de ahorro constante:** s (expresada como porcentaje del ingreso siendo S la cantidad de ahorro, $S = sY$)

III) **Tasa de depreciación del capital constante:** δ (expresada como porcentaje del capital)

IV) **Tasa de crecimiento de la población constante:** $\frac{dL}{dt} = \frac{\dot{L}}{L} = n$

Con dL/dt derivada del factor trabajo respecto del tiempo. Se considera que toda la población está empleada, con lo que no se tratan las cuestiones relacionadas con el desempleo o la tasa de actividad de la población.

¹¹ La función de producción es estricta cóncava (productos marginales positivos y decrecientes), cumple con las condiciones de Inada y exhibe rendimientos constantes a escala (homogénea de grado 1). Supone mercados competitivos en los factores de producción y en los productos por lo que los beneficios extraordinarios se reducen a cero. Lo anterior implica que en caso de existir alguna innovación las empresas no pueden apropiarse de los beneficios. Con rendimientos constantes a escala se quiere precisar que bajo competencia perfecta el pago a los factores de producción (de acuerdo a sus productividades marginales) agota el valor del producto, por tanto no quedan recursos para fomentar la innovación. En otras palabras las empresas no invierten en tecnología. El progreso técnico es exógeno. Ver Apéndice para más detalles.

V) **Tasa de crecimiento del progreso tecnológico constante:** $\frac{\dot{A}}{A} = \gamma_A$. A partir de lo anterior, se tiene que:

(a)- **Inversión neta de capital:** La inversión neta se expresa como la diferencia entre el ahorro bruto $sAf(K, L)$ y la depreciación del capital (δK) :

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = sY - \delta K = sAf(K, L) - \delta K \quad (1.9)$$

Con $\dot{K} = dK/dt$ derivada del capital respecto del tiempo.

(b)- **Ecuación fundamental:** Sea \hat{k} la relación capital/trabajo efectivo o cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo,

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}$$

Derivando \hat{k} respecto del tiempo, la ecuación (1.9) queda expresada en términos per cápita como sigue:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{dK}{dt} \frac{1}{AL} - \hat{k}[n + \gamma_A]$$

Ahora como $\hat{y} = Y/AL$ es el producto por unidad de trabajo efectivo $\hat{y} = f(K/AL, 1) = f(\hat{k}, 1)$ y dividiendo (1.9) por AL

$$\frac{\dot{K}}{AL} = s \frac{Y}{AL} - \delta \frac{K}{AL} = sf(\hat{k}) - \delta \hat{k}$$

Ahora sustituimos lo anterior en $\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{dK}{dt} \frac{1}{AL} - \hat{k}[n + \gamma_A]$ y despejamos $\frac{d\hat{k}}{dt}$

$$\hat{k} = sf(\hat{k}) - \hat{k}[n + \gamma_A + \delta] \quad (1.10)$$

La expresión (1.10) es la tasa de cambio del stock de capital medido por la diferencia de dos términos. Es la ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan. El primer término $sf(\hat{k})$ es la inversión realizada por unidad de trabajo efectivo y el segundo término $\hat{k}[n + \gamma_A + \delta]$ es la llamada inversión de reposición.

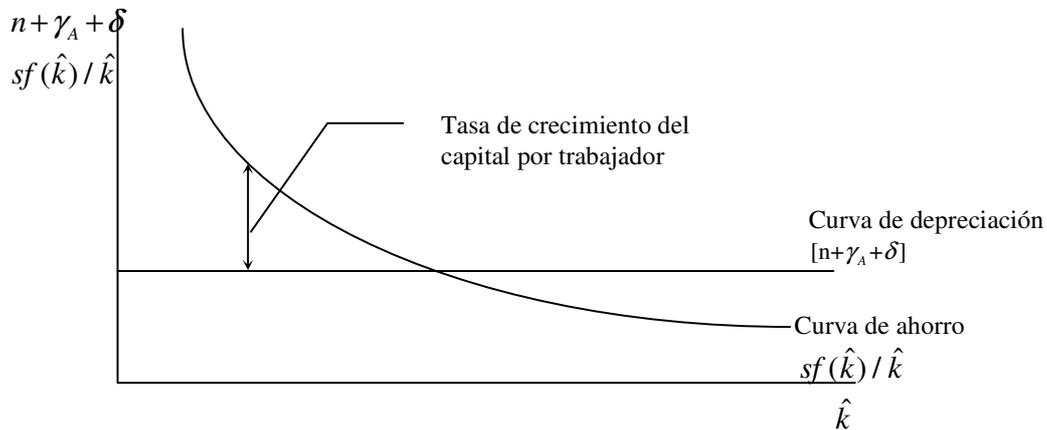
(c)- **Tasa de crecimiento del stock de capital por unidad de trabajo:**

La tasa de crecimiento del capital per cápita $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{d\hat{k}}{\hat{k} dt}$ se obtiene dividiendo (1.10) por \hat{k} :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = s \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} - [n + \gamma_A + \delta]$$

$$\gamma_{\hat{k}} = s \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} - [n + \gamma_A + \delta] \quad (1.11)$$

Gráfico 1.1: Tasa de crecimiento y el estado estacionario en el modelo de Solow-Swan



(d)- **El estado estacionario:** El estado estacionario es aquella situación en que las variables del modelo crecen a una tasa constante¹². En el caso del modelo Solow-Swan el estado estacionario corresponde a $\dot{\hat{k}} = 0$. La ecuación (1.10) se conoce como la ecuación fundamental de Solow y expresa que la tasa de cambio del capital efectivo por trabajador (K / AL) es la diferencia: $sf(\hat{k}) - [n + \gamma_A + \delta]\hat{k}$. El primer término corresponde a la inversión por unidad de trabajo efectivo, esto es, el producto por unidad de trabajo efectivo, $f(\hat{k})$, del que se destina una proporción para la inversión igual a s . El segundo término, es $[n + \gamma_A + \delta]\hat{k}$, es la inversión de reposición: la inversión necesaria para mantener \hat{k} constante. Para aclarar lo anterior obsérvese que el capital se deprecia, por lo tanto para evitar que el stock de capital se reduzca hay que reponerlo. La depreciación se expresa como $\delta\hat{k}$. Luego, la cantidad de trabajo efectivo AL aumenta de tal forma que la inversión necesaria para mantener el stock de capital K constante, no alcanza para sostener el nivel del stock de capital por unidad de trabajo $\hat{k} = K/AL$. Dado que la cantidad de trabajo efectivo AL crece a la tasa $n + \gamma_A$ ¹³, el stock de

¹² Barro, R.J. y Sala-i-Martin, X., *Economic Growth*, Boston: MIT Press, 1999, pp 19

¹³ Al tomar la derivada del producto AL con respecto a t y dividir por AL como veremos más adelante.

capital K debe crecer a la misma tasa $n + \gamma_A$ para que \hat{k} no varíe. La expresión $[n + \gamma_A + \delta]\hat{k}$ es la reposición por el aumento del trabajo efectivo.

En estado estacionario la tasa de crecimiento de $\hat{k} = K/AL$ es igual a cero, el valor de \hat{k}^* de equilibrio, es el que corresponde al punto de intersección de las curvas de ahorro y depreciación. De la ecuación (1.11), si $\gamma_{\hat{k}} = 0$, se tiene que

$$s \frac{f(\hat{k}^*)}{\hat{k}^*} = [n + \gamma_A + \delta]$$

Donde \hat{k}^* es valor de estado estacionario que satisface la condición anterior. Volviendo a (1.11) debemos encontrar cual es el comportamiento de la tasa de crecimiento del capital por unidad de trabajo efectivo ($g_{\hat{k}}$) para los distintos valores de \hat{k} , como el segundo término de (1.11) es constante en el tiempo ($n + \gamma_A + \delta$) nos resta únicamente encontrar que sucede con el primero,

$$\frac{d}{d\hat{k}} \left[\frac{sf(\hat{k})}{\hat{k}} \right] = \frac{\hat{k}[sf'(\hat{k})] - sf(\hat{k})}{(\hat{k})^2} = \frac{-s[f(\hat{k}) - \hat{k}[f'(\hat{k})]]}{(\hat{k})^2}$$

la expresión en el numerador es el producto marginal del trabajo efectivo¹⁴ el cual de acuerdo a las características de la ecuación (1.1) es positivo por lo que la pendiente es negativa. El primer término de (1.11) es una curva con pendiente negativa, la cual tiende a infinito cuando $\hat{k} = 0$ y tiende a cero cuando \hat{k} tiende a infinito. La distancia vertical entre la curva y la recta horizontal $n + \gamma_A + \delta$ es la tasa de crecimiento por unidad efectiva de trabajo, y el punto de intersección corresponde a nivel de capital en estado estacionario \hat{k}^* . Debido a que $n + \gamma_A + \delta > 0$ y que $sf(\hat{k})/\hat{k}$ es monótonamente decreciente desde infinito a cero el punto donde se intersectan es único. Por lo tanto el valor de $\hat{k}^* > 0$ existe y es único como lo muestra el gráfico 1.

(e) **La dinámica de transición:** Lo importante ahora es entender como se comportan las variables del modelo cuando el valor inicial \hat{k} converge a \hat{k}^* sin considerar la forma funcional de la función de producción¹⁵. Recordemos que por definición, el trabajo L y la tecnología A crecen a una tasa n y γ_A , respectivamente. En primer lugar debemos entender que la dinámica del capital, el producto y el consumo por unidad de trabajo efectivo cuando hay convergencia. El capital por unidad de trabajo efectivo, en estado estacionario crece a una tasa cero, esto es, $\dot{\hat{k}}/\hat{k} = 0$ y es el único resultado compatible con una senda de crecimiento sostenido. Dicho lo anterior, buscaremos conocer el comportamiento de \hat{y} , \hat{k} y \hat{c} en estado estacionario donde

¹⁴ Si consideramos que $Y = ALf(\hat{k})$, los productos marginales del capital y el trabajo efectivo son $\frac{\partial Y}{\partial K} = ALf'(\hat{k}) \left(\frac{1}{AL} \right) = f'(\hat{k})$ y $\frac{\partial Y}{\partial L} = f(\hat{k}) + ALf'(\hat{k}) \left(-\frac{K}{(AL)^2} \right) = f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})$ respectivamente.

¹⁵ Suponiendo que posee las propiedades de la función de producción neoclásica. Ver apéndice para más detalles.

$\hat{y} = Y/AL$ y $\hat{c} = f(\hat{k}) - (n + \gamma_A + \delta)\hat{k}$. Al tomar la derivada de \hat{y} y \hat{c} con respecto de t tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Y}{AL} \right) = \frac{AL\dot{Y} - Y[\dot{A}L + A\dot{L}]}{(AL)^2}$$

$$\hat{y} = \frac{AL\dot{Y} - Y[\dot{A}L + A\dot{L}]}{(AL)^2}$$

De la última ecuación encontramos $\hat{y} = \frac{\dot{Y}}{AL} - \frac{Y}{AL} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{Y}{AL} \frac{\dot{L}}{L}$. Si dividimos por \hat{y} ambos lados

$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \gamma_A - n \quad (1.12)$$

Otro resultado importante es el de conocer la tasa de crecimiento de \hat{c} , de nuevo tomamos la derivada con respecto a t y dividimos todo por c

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = f'(\hat{k})\hat{k} - (n + \gamma_A + \delta)\hat{k}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left[\frac{f'(\hat{k})}{\hat{c}} \hat{k} - \frac{(n + \gamma_A + \delta)}{\hat{c}} \hat{k} \right] \frac{\hat{k}}{\hat{k}}$$

Como en estado estacionario $\dot{\hat{k}}/\hat{k} = 0$ entonces $\dot{\hat{c}}/\hat{c} = 0$. Para conocer el resultado de \hat{y}/\hat{y} nos apoyaremos en los resultados de las variables per cápita y , k y c . Al tomar las derivadas de y , c y k con respecto a t

$$\frac{dA\hat{y}}{dt} = \dot{A}\hat{y} + A\dot{\hat{y}}$$

$$\frac{\dot{A}\hat{y}}{A\hat{y}} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}}$$

$$\frac{\dot{A}y}{Ay} = \gamma_A + \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}}$$

El consumo per cápita se define como $A\hat{c} = [f(\hat{k}) - (n + \gamma_A + \delta)\hat{k}]A$ al tomar la derivada con respecto a t

$$\frac{dA\hat{c}}{dt} = \left[f'(\hat{k})\hat{k} - (n + \gamma_A + \delta)\hat{k} \right] \dot{A} + \dot{A} \left[f(\hat{k}) - (n + \gamma_A + \delta)\hat{k} \right]$$

$$\frac{A\dot{\hat{c}}}{A\hat{c}} = \left[\frac{f'(\hat{k})\hat{k}}{A\hat{c}} - \frac{(n + \gamma_A + \delta)\hat{k}}{A\hat{c}} \right] \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} + \frac{\dot{A}}{A}$$

Como en estado estacionario $\dot{\hat{k}}/\hat{k} = 0$ entonces $\gamma_A = A\dot{\hat{c}}/A\hat{c}$. Para el caso de k , derivamos $A\hat{k}$ con respecto a t

$$\frac{dA\hat{k}}{dt} = \dot{A}\hat{k} + A\dot{\hat{k}}$$

$$\frac{A\dot{\hat{k}}}{A\hat{k}} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$$

De la misma manera como en estado estacionario $\dot{\hat{k}}/\hat{k} = 0$ entonces $\gamma_A = A\dot{\hat{k}}/A\hat{k}$. Por último si definimos $Y = AL\hat{y}$, $C = (1-s)Y$ y $K = AL\hat{k}$ al tomar las derivadas con respecto a t

$$\dot{K} = [\dot{A}L + AL\dot{\hat{k}}]\hat{k} + AL\dot{\hat{k}}$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} + n + \gamma_A$$

Como en estado estacionario $\dot{\hat{k}}/\hat{k} = 0$ entonces $\dot{K}/K = n + \gamma_A$. Para el caso de Y

$$\dot{Y} = [\dot{A}L + AL\dot{\hat{y}}]\hat{y} + AL\dot{\hat{y}}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} + \gamma_A + n$$

Para C al derivar con respecto a t

$$\dot{C} = (1-s)\dot{Y}$$

$$\dot{C} = (1-s)Y \frac{\dot{Y}}{Y}$$

Si sustituimos el resultado de \dot{Y}/Y y consideramos el hecho de que $C = (1-s)Y$ tenemos

$$\dot{C} = C \left[\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} + \gamma_A + n \right]$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = \left[\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} + \gamma_A + n \right]$$

Finalmente el único resultado que resuelve las ecuaciones anteriores es $\dot{\hat{y}}/\hat{y} = 0$. Podemos ahora resumir de la siguiente manera

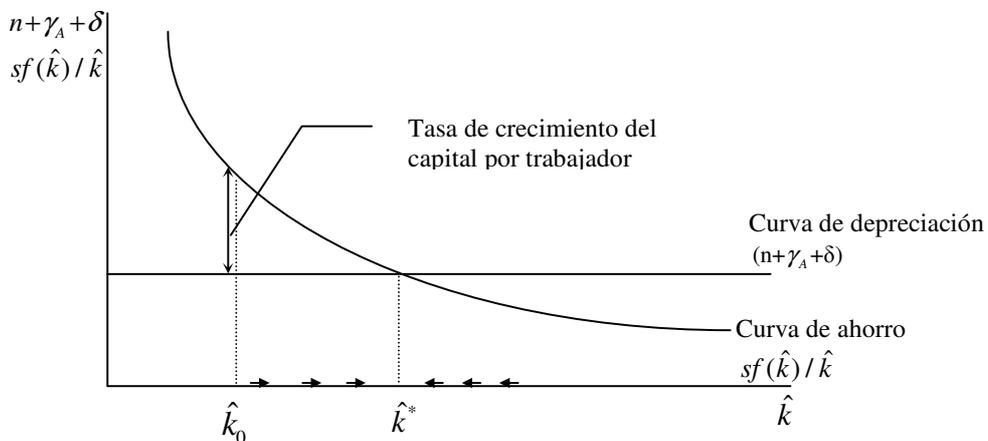
$$\frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = \gamma_A \quad (1.14)$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{C}}{C} = n + \gamma_A \quad (1.15)$$

Las variables \hat{k} , \hat{y} y \hat{c} en estado estable son constantes. De acuerdo a esto, el crecimiento de las variables per capital k , y y c es igual a la tasa de crecimiento del progreso técnico exógeno g_A . Las variables en niveles K , Y y C en consecuencia crecen de acuerdo a $n + \gamma_A$. Por lo anterior cambios en la tasa de ahorro, s , en el nivel de producción o en el progreso técnico afectan los niveles de equilibrio de estado estable \hat{k}^* , \hat{y}^* y \hat{c}^* .

Gráfico 1.2: El capital por trabajador correspondiente al estado estacionario en el modelo neoclásico.



Si la economía se encuentra en una situación de dotación de capital per cápita como \hat{k}_0 , inferior a \hat{k}^* , la tasa de crecimiento del capital efectivo por trabajador $\hat{k} = K / AL$ que en el gráfico 2 se representa por la distancia vertical entre la curva $sf(\hat{k})/\hat{k}$ y la curva de efectiva depreciación $n + \gamma_A + \delta$. El estado estable se alcanza cuando \hat{k} es constante.

Si la dotación inicial en términos de capital per cápita es superior a \hat{k}^* , tiene lugar un decrecimiento que reconduce la economía a los niveles del estado estacionario. Una vez alcanzada la situación correspondiente al estado estacionario, la economía se mantiene en ese nivel.

1.1.3. La convergencia

Considérese de nuevo la ecuación (1.11)

$$\gamma_{\hat{k}} = s \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} - [n + \gamma_A + \delta]$$

que representa la tasa de crecimiento del capital por unidad de trabajo efectivo, \hat{k} . Si calculamos el límite cuando $\hat{k} \rightarrow \infty$

$$\lim_{\hat{k} \rightarrow \infty} \gamma_{\hat{k}} = -[n + \gamma_A + \delta].$$

El resultado anterior nos dice que a cierto nivel de \hat{k} la economía experimenta un decrecimiento de \hat{k} . Lo anterior sucede cuando $\hat{k} > \hat{k}^*$. Si por el contrario $\hat{k} < \hat{k}^*$ entonces la tasa de crecimiento del capital efectivo por trabajador es positiva. Es fácil notar que si $\hat{k} = \hat{k}^*$, $\gamma_{\hat{k}} = 0$. Por lo tanto la derivada parcial

$$\frac{\partial \gamma_{\hat{k}}}{\partial \hat{k}} = -s \left[\frac{f'(\hat{k})}{\hat{k}} - \frac{f(\hat{k})}{(\hat{k})^2} \right] < 0 \quad (1.15')$$

Es negativa. De esta manera llegamos a una cuestión fundamental: ¿Las economías con menor capital per cápita crecen más rápido que las economías con niveles mayores de capital? En otras palabras. ¿Existe una convergencia entre las economías?

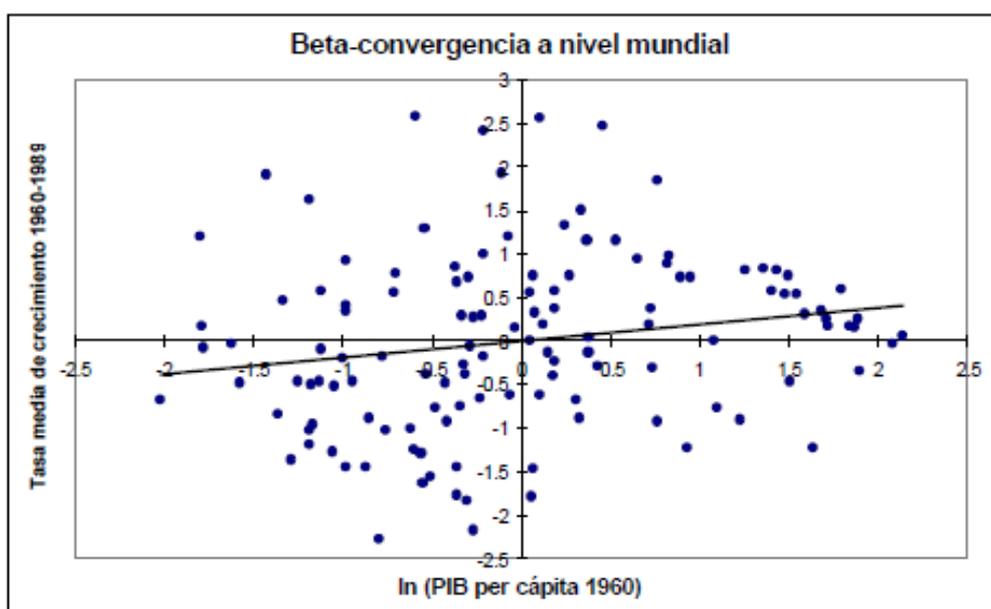
En la literatura económica la hipótesis de que las economías pobres tienden a crecer más rápidamente en términos per cápita que las ricas, se conoce como el debate de la convergencia. Existen básicamente dos vías para examinar la convergencia, las llamadas sigma (σ) y beta (β) convergencia. Cuando se habla de σ - convergencia el análisis se centra en el cambio en el tiempo de la varianza del producto interno bruto per cápita (pib per cápita) de una sección cruzada de países (cross-country). Si dicha varianza disminuye, esto sugiere que los países de la muestra convergen hacia un nivel común de pib per cápita. Por otro lado el examen de β - convergencia implica considerar el nivel del pib per cápita del periodo inicial como una

variable explicativa en el análisis econométrico. Si el coeficiente de la variable anterior es negativo implica que los países pobres acontecen a un más rápido crecimiento económico. Algo que es importante aclarar radica en la diferencia entre las dos pruebas. La σ -convergencia, por ejemplo no se enfoca en los mecanismos causales mientras que la β -convergencia si busca entender tales mecanismos¹⁶.

1.1.3.1. La β convergencia

Si se considera como única diferencia el nivel inicial de capital per cápita¹⁷, estaremos hablando de lo que se conoce como β -convergencia absoluta. Aquí la idea básica es que las naciones pobres crecen siempre más rápido que las ricas.

Grafico 3



Si por otro lado omitimos el supuesto de que las economías tienen los mismos parámetros y los mismos niveles per cápita de estado estable nos enfrentamos con lo que se conoce como la β -convergencia condicional¹⁸.

La hipótesis de la β -convergencia absoluta hace referencia a la dinámica por la que, entre países con estado estacionario común, las naciones más pobres tienden a crecer a una tasa superior a la de las más ricas, y, por ende, a reducir el diferencial existente entre ellas en cuanto a nivel de pib per cápita. La causa de este asunto, como se explico en la sección anterior, radica en el supuesto de que existen rendimientos marginales decrecientes del capital. Sin embargo si las distintas economías no comparten los mismos estados estacionarios no será posible alcanzar

¹⁶ Rogers, Mark, *Knowledge, technological catch-up and economic growth*, Harris Manchester College, University of Oxford, Edward Elgar, 2003, cap 7

¹⁷ En dicha hipótesis todos los países tienen semejante estructura. El mismo nivel de s, n y δ así como la misma función de producción, $f(\bullet)$. En conclusión tienen los mismos valores de capital e ingreso per cápita.

¹⁸ Barro, R.J. y Sala-i-Martin, X., *Op. Cit.*, 1999.

los mismos niveles de pib per cápita en el largo plazo. La tabla 1.1¹⁹ resume algunos de los muchos trabajos sobresalientes que existen en la literatura, donde resalta la evidencia en contra de la β -convergencia absoluta

Tabla 1.1 Convergencia Absoluta. Modelo de Solow

Autor	Muestra	Método Econométrico	Resultado
Baumol (1986)	16 países industrializados, datos Madison 1870-1879	MCO	Convergencia
Baumol y Wolff (1988)	97 países 1975-85 datos Summer y Heston	MCO	No convergencia
Mankiew et. al. (1992)	98 países 1960-85	MCO	No convergencia
Bernard y Durlauf (1995)	15 países OCDE 1900-87	Prueba ADF	No convergencia
Quah (1996)	118 países 1962-84	Procesos de Markov	No convergencia
Prittchet (1997)	108 países datos PWT 1960-90	Análisis Estadístico	No convergencia
Sarkar (1999)	110 países 1960-93	Datos Agrupados (pooled regresión)	No convergencia

De esta forma y de acuerdo al enfoque neoclásico se sigue que lo que se observa en realidad es un proceso de convergencia condicional que considere las diferencias estructurales entre naciones y que lleva a que la convergencia de cada país se realice hacia distintos estados estacionarios.

La expresión matemática de la β -convergencia absoluta puede realizarse a través de la siguiente ecuación²⁰:

$$\frac{1}{T} \log \left(\frac{y_{i,T}}{y_{i,0}} \right) = \alpha - \beta \log(y_{i,0}) + u_i \quad (1.16)$$

a partir la estimación de mínimos cuadrados ordinarios de datos de corte transversal, donde $y_{i,t}$ es el pib per cápita de la región i ($i = 1, 2, \dots, N$) en el año t , T es la longitud del periodo de

¹⁹ Cavusoglu, Nevin y Tebaldi, Edinaldo, *Evaluations growth theories and their empirical support: An assessmnet of the convergente hipótesis*, Journal of Economic Methodology 13:1, 49-75 March 2006. Appendix. MCO: Mínimos cuadrados ordinarios. Prueba ADF: Dickey Fuller aumentada.

²⁰ Barro, R.J. y Sala-i-Martin, X., op. cit., 1999. Cap 1

estudio, α es un parámetro desconocido, y β es una constante positiva tal que $0 < \beta < 1$, y u_i es un término de error aleatorio²¹.

Los resultados mostrados en el gráfico 3²², por ejemplo, indican que a nivel mundial no existe β -convergencia absoluta. El coeficiente estimado para la β es positivo (como lo muestra la recta de tendencia con pendiente positiva) y como ya se dijo, se rechaza la hipótesis de convergencia absoluta entre países. La convergencia β establece una relación negativa entre tasa de crecimiento entre las fechas 0 y T , y el nivel inicial de pib per cápita, lo que exige que el β de la regresión lineal expresada en (1.16) sea de magnitud positiva, y estadísticamente significativo.

Para el caso de la β -convergencia condicional el análisis puede explicarse desde dos enfoques diferentes²³. El primero conocido como “convergencia clásica”,²⁴ se refiere como ya lo hemos comentado al hecho de que las economías más alejadas de su estado estable (de acuerdo al modelo de Solow-Swan) crecerán más rápido.

La expresión matemática de la β -convergencia condicional puede realizarse a través de la siguiente ecuación²⁵:

$$\frac{1}{T} \log \left(\frac{y_{i,T}}{y_{i,0}} \right) = \alpha - \beta \log (y_{i,0}) + \gamma X_i + u_i \quad (1.17)$$

A partir la estimación de mínimos cuadrados ordinarios de datos de corte transversal. Donde las X_i es una matriz de otras variables explicativas. Intentan corregir la relación negativa entre la tasa median de crecimiento y los niveles de pib per cápita inicial debido a las diferencias en el estado estacionario de las economías. Variables como la tasa media de crecimiento de la población y la tasa media de ahorro (cuya proxy es el cociente entre I+D y el pib per cápita) son de este tipo de variables que además en el modelo de Solow-Swan determinan el estado estacionario siendo el efecto sobre este, negativo y positivo respectivamente. Adicionalmente a las dos variables anteriores, el modelo ampliado se agrega la tasa de crecimiento del progreso técnico, cuyo efecto es positivo. El gráfico 1.4²⁶ muestra los resultados. Es importante resaltar que en el modelo de convergencia condicional se muestra un mejor ajuste global²⁷. De manera similar a la Tabla 1 mostramos un extracto de los trabajos empíricos más sobresalientes donde

²¹ De media cero, varianza constante, que no depende del tiempo. Se elimina la posibilidad de autocorrelación entre los u_i . Se supone también la independencia entre los u_i y los $\log (y_{i,0})$, de manera que la influencia de $\log (y_{i,0})$ y u_i sea independiente (aditiva).

²² Los gráficos en esta sección son tomados de las estimaciones econométricas de Escot y Galindo (2000) a partir de la base de datos elaborada por Summer y Heston (1991) para el periodo 1960 a 1990 con datos de Penn World Tables Mark 5.6.

²³ Rogers, Mark, 2003. Op. Cit. Cap 7. De acuerdo a Rogers estos dos marcos teóricos son diametralmente opuestos: La llamada “convergencia clásica” y el catch-up tecnológico”, pero son empíricamente similares.

²⁴ Entre los trabajos seminales se encuentran los de Barro y Sala-i-Martin (1992), Mankiw, Romer y Weil (1992).

²⁵ Barro, R.J. y Sala-i-Martin, X., Op. Cit., 1999. Cap 11

²⁶ Gráfica de acuerdo a las estimaciones econométricas de Escot y Galindo Op. Cit. A: África Subsahariana; África del Norte y Oriente Próximo; C: Asia; D: América del Sur y Central; E: Suráfrica; G: Sudeste Asiático; F: América del Norte, Europa y OCDE. Fuente Penn World Tables.

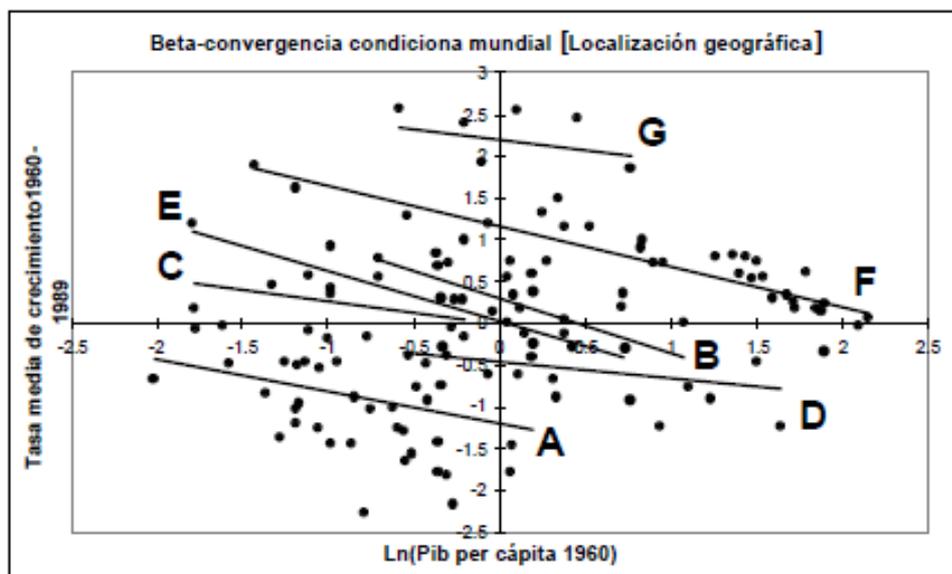
²⁷ Cavusoglu, Nevin y Tebaldi, Edinaldo. Op. Cit. 2006

se exhibe un sesgo favorable a la convergencia condicional en la Tabla 1.2. Al considerar las diferencias en los estados estacionarios de los distintos países, el signo estimado de para la correlación parcial entre la tasa de crecimiento y el nivel inicial de pib per cápita es negativo. Lo anterior es evidencia clara a favor de la convergencia condicional.

Tabla 1.2. Modelo de Solow aumentado.

Autor	Muestra	Método Econométrico	Resultado
Mankiw et. al. (1992)	98 países 1960-85	MCO	Convergencia
Barro y Sala-i-Martin (1995)	Estados de US 1880-1990	MCO no lineales	Convergencia
Barro y Sala-i-Martin (1995)	Prefecturas Japón 1930-90	MCO no lineales	Convergencia
Barro y Sala-i-Martin (1995)	Regiones Europeas 1950-90	MCO no lineales	Convergencia
Barro y Sala-i-Martin (1995)	87 países 1965-75 datos de Summer y Heston	Regresiones aparentemente no relacionadas (SUR)	Convergencia
Barro y Sala-i-Martin (1995)	97 países 1975-85 datos de Summer y Heston	Regresiones aparentemente no relacionadas (SUR)	Convergencia
Islam (1995)	99 países 1975-85 datos de Summer y Heston	Datos agrupados (Pooled regresión)	Convergencia
Dinopoulos y Thompson (1999b)	98 países 1985- datos de Summer y Heston	MCO no lineales y MCO	Convergencia depende de la medición del capital humano
Andres y Bosca (2000)	OCDE 1960-90	MCO no lineales en dos etapas (NL2S), SUR, Variable Instrumental (IV)	Fuerte evidencia convergencia condicional tipo Barro y Sala-i-Martin (1991-92)
Linden (2000)	16 países OCDE 1900-97	Análisis paramétrico	Brechas en el ingreso. Convergencia condicional no clara
Sarno (2001)	G7 PWT 1950-92	Ajuste no lineal hacia el estado estable en series de tiempo	Ajuste largo plazo no lineal. No se examina convergencia condicional directamente.
Bassanini y Scarpetta (2002)	21 países OCDE 1971-98	PMG	Convergencia
Dowrick y Rogers (2002)	57 países PWT 6.6ª 1965-90	GMM	Estimación GMM Confirma convergencia. Resalta importancia de la convergencia debida a retornos decrecientes

Grafico 1.4



1.1.3.2 El catch-up tecnológico

El enfoque alternativo en cuanto a la convergencia condicional es el catch-up tecnológico. La “convergencia clásica” establece que existe libre acceso a la tecnología, esto es, asume la existencia de spillovers perfectos: la difusión tecnológica se lleva a cabo sin costo. Por otro lado para el análisis del catch-up, los países pobres pueden exhibir un más rápido crecimiento económico. La capacidad de acceder y absorber nuevo conocimiento (capacidad de absorber) es un aspecto crítico para posibilitar el catch-up tecnológico (reducción de las brechas tecnológicas). Por lo tanto uno de los factores explicativos es la difusión tecnológica. Al igual que en el caso anterior se han realizado diversos estudios empíricos para encontrar evidencia acerca del catch-up.

El Acercamiento a la Brecha Tecnológica²⁸

El proceso de la convergencia o divergencia económica ha sido asociado, junto con otros factores, con diferencias de desarrollo tecnológico y recursos humanos (Abramovitz, 1986; Maddison, 1982; Baumol, 1986). El acercamiento a la brecha tecnológica desarrollado por Posner (1961), Gomulka (1971), Cornwall (1977), Abramovitz (1986) y otros autores propone que las diferenciales significativas en los niveles y las tendencias tecnológicas que caracterizan el sistema económico internacional podrán superarse únicamente con transformaciones radicales en las estructuras tecnológicas, económicas y sociales²⁹. Otros autores involucrados con la discusión sobre el *catch up* tecnológico son Veblen (1915), Nurske (1955), Gerschenkron (1962) y Rostow (1971). El acercamiento asume la existencia de una correlación fuerte entre las tasas de crecimiento económico y tecnológico. El atraso tecnológico relativo de los países pobres trae consigo una oportunidad para su rápido crecimiento económico (Abramovitz, 1966 y

²⁸Para la realización de esta sección nos apoyamos en el trabajo de Guzman, Alenka y Gómez Hortencia. “Technological gaps and converging process between emergency and industrialized countries in bio-pharmaceutical industry” presentado en Globelics: 6th International Conference 2008, Ciudad de México.

⁴¹ Los trabajos de K. Pavitt y L. Soete han probado la hipótesis presentada por M.V. Posner (1961) y S. Gomulka (1971), citada en J. Fagerberg (1987).

1986). De hecho, estos países tienen un gran potencial debido al hecho de su retraso, hasta la posibilidad de que imiten a los países más avanzados y adopten las mejores técnicas³⁰. Así que la estrategia de imitación haría posible a los países con atraso tecnológico, con respecto a la frontera de innovación global, alimentar sus tasas de crecimiento económico. De cualquier manera, las posibilidades de convergencia y *catch up* están condicionadas a la capacidad de transformar las estructuras sociales, institucionales y económicas. La existencia de capacidades de infraestructura (Abramovitz, 1986) y la reforma de las instituciones (Maddison, 1982) son condiciones necesarias para los rápidos crecimiento y *catch up* económicos. Los modelos neoclásicos de crecimiento (comenzando con Solow, 1959) predicen un crecimiento económico a largo plazo con una tasa positiva solamente cuando ocurre el cambio tecnológico. El reconocimiento de la influencia del progreso tecnológico, como una variable exógena en crecimiento económico, fue probado en varias investigaciones empíricas. Los nuevos modelos de crecimiento (Romer, 1986, 1990; Lucas, 1988; Barro, entre otros) señalan la generación de conocimiento como una variable endógena; incluso si las firmas producen el conocimiento, podrían beneficiarse de los derrames de conocimiento provenientes de la economía global. El *catch up* tecnológico se define como “el proceso por el cual los países pueden beneficiarse de la existencia de un stock de conocimiento de producción disponible en el resto del mundo, a lo que se le conoce como brecha tecnológica” (Rogers, 2003: 43). En este contexto, el de la explicación de las diferencias entre las dinámicas tecnológicas entre países, la pregunta principal sobre la investigación empírica es “¿Cómo los países aprenden y absorben la tecnología del resto del mundo?” (Ibid). Cuando existe un largo periodo de tiempo en el cual la relación capital-producto no cambia, la variación entre países puede explicarse por la innovación³¹. En ese sentido, “la brecha es un indicador agregado de algunos de los factores que influyen la tasa de transferencia tecnológica internacional y por lo tanto, también a las tasas de crecimiento de innovación y productividad de trabajo en los países que importan tecnología” (Gomulka, 1990, p. 155). De esta forma se establece un círculo virtuoso entre la inversión de capital y la innovación. En la lógica del círculo virtuoso que se establece entre la inversión de capital y la innovación, las decisiones de inversión concernientes al capital físico y a la Investigación y Desarrollo, implican una condicionalidad y complementariedad en la estrategia de las firmas con el fin de competir en el Mercado. De hecho, la producción de un nuevo producto derivado de la investigación y desarrollo requiere comúnmente una ampliación de las capacidades productivas o de la adaptación de las plantas lo que a su vez requiere del apoyo de estudios en tecnología especializada (Guellec, 1993).

1.1.3.3. La σ -convergencia.

Para finalizar esta sección nos enfocaremos en la llamada σ -convergencia. Se puede hablar de σ -convergencia cuando tiene lugar una reducción de la dispersión de los niveles de pib per cápita entre las naciones; esto es, cuando se puede inferir una disminución en la varianza o de la desviación típica del pib per cápita del grupo estudiado. Como medida de la dispersión del pib per cápita, puede tomarse la varianza muestral de su logaritmo³²:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\log y_{it} - \mu_{it}]^2 \quad (1.18)$$

³⁰ B. Amable, R. Barré y R. Boyer (1997), p. 62.

³¹ En la actualidad, el proceso de innovación se concibe como el resultado de una interacción permanente entre el suministro de conocimiento disponible, el fruto de la investigación científica y las decisiones estratégicas de la empresa

³² Barro, R.J. y X. Sala-i-Martin ,op. cit., 1999. Cap. 1

donde μ_{it} es la media muestral de $\ln y_{it}$. La varianza muestral del logaritmo es prácticamente invariante³³ con el nivel de renta media de las economías estudiadas. En este sentido, es una medida empíricamente cercana al coeficiente de desviación, por el que se divide la varianza de una variable por el cuadrado de la media de dicha variable.

Si el número de observaciones, N , es grande, la varianza muestral se aproxima a la varianza poblacional, y la evolución en el tiempo de σ_t^2 se obtiene a continuación, a partir de la ecuación (1.16) :

(1.16) Puede reescribirse como (donde T es pensada en años):

$$\log(y_{i,t}) = \alpha + (1 - \beta) \log(y_{i,t-1}) + u_i \quad (1.19)$$

donde tenemos que³⁴:

$$\sigma_t^2 \cong (1 - \beta)^2 \sigma_{t-1}^2 + \sigma_u^2 \quad (1.20)$$

Esta ecuación (1.20) en diferencias de primer orden resulta estable siempre que se cumpla que $(1-\beta)^2 < 1$. Siendo la restricción $0 < \beta < 1$ la condición de convergencia β , se cumple esta condición de estabilidad. La convergencia β resulta, por tanto, condición necesaria, aunque no suficiente, para la existencia de convergencia σ ³⁵. Las economías más pobres habrán de crecer más deprisa que las más ricas, para que pueda reducirse la dispersión en el seno del grupo estudiado.

El análisis comparado de estos dos tipos de convergencia permite poner de manifiesto los dos fenómenos que contribuyen al resultado final observado: de un lado, la convergencia β implica la presencia de un mecanismo de alcance de las economías más ricas por parte de las más pobres vía un mayor crecimiento de estas últimas, y, de otro lado, las regiones se ven sometidas a shocks específicos³⁶ que suponen un aumento de la dispersión de los PIB por habitante. La convergencia σ es la resultante global de los dos mecanismos descritos, y sólo tiene lugar cuando la convergencia β predomina sobre el efecto de los shocks que afectan a cada una de las regiones³⁷.

1.2. La nueva teoría de crecimiento

Sin restar mérito a la contribución neoclásica, la evidencia empírica reporto hallazgos que cuestionaban la capacidad explicativa de estos modelos. Abramovitz (1956) mostró que en

³³ Gujarati, D, *Econometría básica*, Madrid: McGraw Hill, 1981, p. 207.

³⁴ $Var[\log(y_{i,t})] = Var[\alpha] + (1 - \beta)^2 Var[\log(y_{i,t-1})] + Var[u_i]$

³⁵ “La situación cuando β – convergencia y σ – convergencia coinciden es presumiblemente lo que gustaría que sucediera a la mayoría de los investigadores (...) Una regresión de sección cruzada puede únicamente representar un comportamiento promedio, pero no el comportamiento de una distribución completa”. Quah, Danny T. “Empirics for economic growth and convergence”. LSE economics Department and CEP. CENTRE FOR ECONOMIC PERFORMANCE. Discussion paper No. 253. July 1995

³⁶ Barro, R.J., “Economic Growth in a Cross Section of Countries”, *Quarterly Journal of Economics*, 106, 2 (mayo 1991) pp. 407-443.

³⁷ Hénin, P.-Y. e Y. Le Pen (1995): “Les épisodes de la convergence européenne”. *Revue Économique* 46, pp. 667-677.

buena medida el crecimiento observado en Estados Unidos no podía ser explicado de manera directa por los factores involucrados en el modelo neoclásico, a menos que se asumiera cambio tecnológico exógeno como una explicación satisfactoria. Resultado corroborado por el mismo Solow (1957) y otros. Los intentos que siguieron a las publicaciones de Solow y Abramovitz por explicar el crecimiento y sus diferencias tuvieron como apoyo la teoría neoclásica del crecimiento. Dichas contribuciones estaban dirigidas a lo que se conoce como contabilidad del crecimiento³⁸ y a estimar funciones de producción.

Hacia la mitad de la década de los 70's justo cuando la economía pasaba de un periodo alto y estable crecimiento a uno caracterizado por bajo y lento desempeño, la teoría neoclásica de crecimiento y su trabajo aplicado se encuentran en una encrucijada. Las nuevas aportaciones estaban inspiradas en Schumpeter, Kaldor³⁹ y otros autores que apuntaban a la existencia de brechas tecnológicas entre países. Por un lado se enfocaron en el potencial de alcance de los países por debajo de la frontera tecnológica y de los prerequisites para explotar su potencial (Gomulka 1971, Cornwall 1977, Maddison 1979 y Abramovitz 1979). Por otro lado, autores como Dixon y Thirwall (1975), Thirwall (1979) proponían que la existencia de brechas tecnológicas entre países no necesariamente implica convergencia, pero puede ser consistente con un sendero divergente.

A mitad de los 80's, la propuesta neoclásica toma nueva fuerza en las llamadas "nuevas teorías del crecimiento. Ya desde la década de los 60's los economistas conocían el hecho de que el crecimiento económico viene de un proceso endógeno y que la mayor debilidad de modelo de Solow consiste en intentar explicar la dinámica del producto por medio del progreso técnico exógeno. Arrow (1962) fue el primer economista en intentar modelar el cambio tecnológico endógeno por introducir mecanismos de lo que se conoce como learning-by-doing⁴⁰ en los modelos de crecimiento.

La gran dificultad en incluir progreso técnico endógeno en la teoría neoclásica del crecimiento y mantener al mismo tiempo supuestos de competencia perfecta, llevó a la modificación propuesta por Romer (1986). En la teoría del crecimiento endógeno, el supuesto de competencia perfecta es remplazado por imperfecta competencia y retornos crecientes a escala, lo cual permite la generación de nuevas ideas. De acuerdo a Cavusoglu y Tebaldi⁴¹ (2006): "la teoría de crecimiento endógeno se puede ver como una extensión del modelo Solowiano combinando elementos tempranos de la teoría, con el supuesto de retornos crecientes; elementos de imperfecta competencia; y algo de investigación en ciencia Microeconomía, cambio tecnológico. Romer (1986) desarrolla un modelo en el cual el progreso técnico depende de la ratio capital-trabajo, esto es, hay learning-by-doing en el modelo. Se arguye que la producción de bienes de capital y de consumo puede experimentar retornos decrecientes a escala con relación a factores reproducibles, tales como el capital físico y humano, pero que

³⁸ En el modelo de Solow, el crecimiento a largo plazo del producto por trabajador depende únicamente del progreso técnico. Sin embargo a corto plazo el crecimiento puede resultar del progreso técnico o de la acumulación de capital. Esto implica que las fuentes que determinan el crecimiento a corto plazo son un asunto empírico. La contabilidad del crecimiento provee una manera de descomponer el crecimiento del producto por trabajador en las contribuciones del crecimiento del capital y del trabajo y un remanente conocido como *Residuo de Solow*. Este es interpretado algunas veces como una medida de la contribución del progreso técnico.

³⁹ Kaldor (1957; 1961) y Kaldor y Mirrlees proponen modelos donde el crecimiento de la productividad a largo plazo era posible a través de progreso técnico endógeno y cambios en la distribución del ingreso.

⁴⁰ De acuerdo a Rogers (2003) op. Cit. el documento de Arrow (1962) "The Economic Consequences of Learning by Doing", es quizá el más importante en cuanto a modelar el cambio tecnológico. En dicho documento Arrow considera que el cambio tecnológico fue resultado del learning-by-doing, en donde 'doing', refiere al proceso de inversión, más que al proceso de producir bienes. La razón de tal argumento se debe a que la evidencia empírica mostró que la tasa de crecimiento de la productividad en cierta actividad, era proporcional a la experiencia acumulada en tal actividad.

⁴¹ Cavusoglu, Nevin y Tebaldi, Edinaldo. Op. Cit. 2006

hay retornos constantes a escala a nivel agregado. Sin embargo, para Barro y Sala-i-Martin (1995), el crecimiento puede estar indefinido debido a que los retornos en bienes de capital (que incluye el humano), no necesariamente son decrecientes conforme la economía se desarrolla. Los spillovers⁴² de conocimiento a través de los productores y beneficios externos del capital humano, son parte de este proceso, pero únicamente porque evitan la tendencia de retornos decrecientes en la acumulación de capital.

El razonamiento atrás de estos argumentos, es que existen positivos spillovers de conocimiento. Ya que el conocimiento no puede ser patentado de manera perfecta ni escondido de firmas rivales. En tal sentido se asume el conocimiento como bien público.

En la línea de modelos de crecimiento endógeno los llamados efectos a escala son relevantes. Estos modelos predicen que a mayor tamaño de la economía el crecimiento es más rápido. La razón es que los mercados mas grandes permiten la maximización del beneficio de las empresas que producen bienes intermedios, los cuales incrementan productividad, expanden las posibilidades de producción y generan crecimiento. Además un economía grande puede motivar una mayor diversidad de fuentes de R&D, la cual genera progreso técnico y promueve crecimiento (Aghion y Howitt 1998, Pareto y Smulders 2002).

Para las nuevas teorías del crecimiento (en contraste con Solow), las diferencias en los niveles de ingreso per cápita de los países pueden persistir indefinidamente, aún si ellos tienen las mismas tasas de ahorro y tasas de crecimiento poblacional. La productividad marginal del capital no cae cuando se incrementa el producto per cápita y por lo tanto no existe convergencia: los ricos siguen ricos y los pobres, pobres. Otra aportación importante a la literatura de crecimiento endógeno es la de Lucas (1988). El modelo se considera endógeno en el sentido de que la racional maximización de la utilidad por parte de los agentes económicos, determina la acumulación de capital humano de manera endógena. La propuesta de Lucas es que niveles iniciales de capital físico y humano son importantes en explicar las diferencias en el producto per cápita a través de los países, debido a la presencia de efectos a escala de capital físico y humano. Dicho de otra manera, las economías que son inicialmente pobres, permanecerán pobres, relativamente, aunque su tasa de crecimiento del ingreso en el largo plazo fuera la misma que la del inicio de las economías ricas.

Aunque los modelos de Romer (1986) y Lucas (1988) son fundamentalmente endógenos, el descubrimiento de nuevas ideas sigue siendo intrínsecamente exógeno. Romer (1990) desarrolla un modelo donde el progreso técnico el motor de la economía, es endógeno. El progreso técnico es generado intencionalmente por los agentes maximizadores de beneficio, quienes responden a los incentivos del mercado. El modelo predice efectos a escala en el capital humano, es decir, una economía con un gran total de stock en capital humano, experimentará un más rápido crecimiento.

Los modelos endógenos se avocan a que existirán diferencias en las tasas de crecimiento debido a que las economías que tiene un mayor stock de capital físico y humano, crecerán más rápido.

⁴² Difusión de conocimiento, ídem

1.2.1. Los modelos de crecimiento endógeno⁴³

Los modelos de crecimiento endógeno⁴⁴ surgen en la década de los años setenta como respuesta a lo propuesto en los modelos de crecimiento neoclásicos. Por ejemplo consideran los rendimientos a escala crecientes y los resultados de la propagación o spillover (modelos de derrame), o el cambio tecnológico endógeno⁴⁵, entre otros. En general todos pronostican divergencia en el crecimiento económico.

Como ya se mencionó anteriormente, cuando tratamos con modelos de crecimiento endógeno se intenta explicar de que manera la acumulación es un proceso autosostenido o dicho de otra manera: la elasticidad producción-capital es igual a uno. En general para explicar lo anterior los modelos de crecimiento endógeno se pueden clasificar en dos grandes tipos: Modelo AK y Modelo BH.

Modelos AK

En estos, el factor explicativo del crecimiento es homogéneo al bien final producido. En promedio estos factores homogéneos pueden ser: a) El capital físico privado o b) El capital público (infraestructura). Para un análisis del factor a) ver el modelo de Romer (1986). El caso del factor b) Barro (1990) por ejemplo.

Modelos BH

En estos modelos el factor que explica el crecimiento no es homogéneo al bien. Como ejemplo: c) Capital humano y d) Conocimiento. Para el caso c) ver Lucas (1988). En cuanto a d) ver Romer (1990).

Reconociendo que en esta investigación no estamos intentando un análisis exhaustivo de teorías del crecimiento, nos limitaremos a dos de los modelos mas conocidos dentro de la clasificación antes mostrada⁴⁶. Intentando ser breves en todos los casos aquí⁴⁷ tratados.

⁴³ Para esta apartado nos apoyamos en Destinobles, Gerald A.: (2007) *Introducción a los modelos de crecimiento económico exógeno y endógeno*. Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/libros/2007a/243/ (17 marzo 2011)

⁴⁴ Griliches, Z., Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth. *Bell Journal of Economics* 10, 1979, pp. 92-116.

Romer, P., Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy*, October, 1986.

Lucas, R. E. On the Mechanics of Development Planning. *Journal of Monetary Economics* 22, 1988, pp. 3-42.

⁴⁵ Conocidos como modelos neo-schumpeterianos puesto que resaltan el hecho de que el avance tecnológico es la única variable apta para potenciar crecimiento económico. Ver más en Schumpeter, J.A., *The Theory of Economic Development* (Oxford: Oxford University Press), 1934. Ver también otros textos:

Romer, P., "Endogenous technological change", *Journal of Political Economy* 98, 1990, pp. 71-102.

Grossman, G.M. y E. Helpman, *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, MA: MIT Press 1991.

Aghion, P. y P. Howitt, "A model of growth through creative destruction". *Econometrica* 60, 1992, pp. 323-702.

⁴⁶ Destinobles, Gerald A.: (2007) *Introducción a los modelos de crecimiento económico exógeno y endógeno*.

Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/libros/2007a/243/ (17 marzo 2011)pg 38

⁴⁷ Sin embargo para mayor detalle se remite al lector como mínimo a destinobles o a la bibliografía de la nota 56

El modelo de Rebelo⁴⁸

Es un modelo en donde no hacen falta los rendimientos crecientes a escala para llevar a cabo el proceso de crecimiento endógeno. No muestra producción marginal decreciente del capital. La elasticidad producto-capital es uno. De acuerdo a lo anterior, es posible un crecimiento sostenido de largo plazo, donde la función de producción es como sigue:

$$Y = AK \quad (1.21)$$

Esta es la función conocida como tecnología “AK” y es la propuesta para resolver el problema de crecimiento bajo el esquema de rendimientos constantes y productividad marginal del capital creciente. En la ecuación (2.21), A define el nivel de tecnología o productividad del capital y K es el stock de capital. Por otro lado el acervo de capital se incorpora a la mano de obra, esto es, el capital humano se acumula y se puede agregar al capital físico. El capital se acumula de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\dot{K} = Y - C \quad (1.22)$$

Por otro lado se supone que no hay depreciación. Para el caso del ahorro para inversión se deriva de una función de utilidad de los consumidores, donde la elasticidad de sustitución intertemporal es constante

$$U = \int_{\tau=0}^{\alpha} (e^{-\rho\tau}) u(c) d\tau \quad (1.23)$$

Donde

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$$

es la función de utilidad instantánea y ρ es una tasa de descuento. Si el valor de ρ es positivo, el consumidor valora menos el consumo futuro que el presente. Aquí θ es la elasticidad de sustitución intertemporal, esto es como se sustituye consumo presente por consumo futuro. Si hacemos el supuesto de que el producto se agota entre la acumulación de capital y el consumo, si además el crecimiento poblacional no existe (tamaño de población fija) lo cual indica que no existe la posibilidad de fuentes exógena al crecimiento y normalizamos la población a 1. El problema del consumidor es el de maximizar la ecuación (1.23) sujeta a restricción, la ecuación (1.22). Para solucionar el problema se plantea el hamiltoniano en valor presente

$$H = e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda [AK - C] \quad (1.24)$$

Y de acuerdo a las condiciones de primero orden (CPO)

⁴⁸ Rebelo, S., “Long-Run Policy Analysis and the Long-Run Growth”. *Journal of Political Economy* 99, 3, 1991, pp. 500-521.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &= 0; & u'(c)e^{-\rho t} &= \lambda \\ -\frac{\partial H}{\partial K} &= \dot{\lambda}; & \dot{\lambda} &= -\lambda A \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si en (1.25) tomamos la derivada con respecto a t de la primera ecuación y el resultado lo sustituimos en la segunda

$$\dot{\lambda} = u''(c)\dot{c}e^{-\rho t} - \rho u'(c)e^{-\rho t}$$

Como $\dot{\lambda} = -\lambda A$ y $\lambda = u'(c)e^{-\rho t}$

$$-u'(c)e^{-\rho t} A = u''(c)\dot{c}e^{-\rho t} - \rho u'(c)e^{-\rho t} \quad (1.26)$$

$$A = \rho - \frac{u''(c)\dot{c}}{u'(c)}$$

Finalmente por las propiedades de la función de utilidad instantánea, $\theta = -u''(c)c/u'(c)$ que es también la elasticidad de la utilidad marginal. Sustituyendo el valor de θ en (1.26) podemos encontrar la tasa de crecimiento del consumo

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[A - \rho] \quad (1.27)$$

Es importante notar que la tasa de crecimiento consumo es siempre la misma. Por otro lado este modelo a diferencia de los modelos de crecimiento exógeno como el de Cass-Koopmans no presenta dinámica transicional. Podemos obtener de la ecuación (1.22) la tasa de crecimiento del capital que es la misma que la del producto⁴⁹

$$\frac{\dot{K}}{K} = A - \frac{C}{K} \quad (1.28)$$

Si suponemos una tasa de crecimiento de estado estable constante, digamos γ , podemos ver que

$$\frac{C}{K} = A - \gamma \quad (1.29)$$

Por otro lado la tasa de ahorro es una constante

⁴⁹ Derivamos $\dot{Y} = A\dot{K}$, luego al dividir por Y $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K}$

$$\frac{S}{AK} = \frac{(AK - C)}{AK} \quad (1.30)$$

$$\frac{S}{AK} = \frac{\gamma}{A}$$

De la última ecuación en (1.30) encontramos que

$$\gamma = A \left(\frac{S}{AK} \right) \quad (1.31)$$

De aquí podemos se puede ver que la tasa de crecimiento de estado estable en el modelo de Rebelo es directamente proporcional a la tasa de ahorro. Para finalizar retomamos la ecuación (1.27) y vemos que el modelo requiere que el producto marginal del capital sea mayor que el crecimiento en el consumo

$$\frac{1}{\theta} [A - \rho] < A \quad (1.32)$$

Ya que si asumimos que el consumidor es impaciente (averso al riesgo) como en los modelos de previsión perfecta en horizonte infinito, esto es, prefiere consumir antes que después, podemos decir que si A es la tasa de interés real

$$(1 - \theta)A < \rho \quad (1.33)$$

Esto rebela que el consumidor valora mas el consumo presente que el futuro como ya se había dicho en el párrafo anterior. Este modelo es, por lo tanto, una manera de reinterpretar el problema de consumo en horizonte finito y previsión perfecta como un modelo de crecimiento. En este modelo es posible obtener un crecimiento en el largo plazo si se considera que existe competencia perfecta y observar una igualdad en tasas de crecimiento óptimo y de equilibrio competitivo.

Las cuestiones que guían a los modelos de crecimiento endógeno como justificar los rendimientos de escala, que proceso competitivo puede mantener equilibrio bajo los supuestos del modelo y cuales son las fuentes del crecimiento endógeno todavía no se responden en este caso.

El modelo de Romer (1986)⁵⁰

El trabajo de Romer (1986), significa un parte aguas en la literatura del crecimiento económico. En dicho trabajo, presenta un modelo con rendimientos crecientes en el cual se observa una estable tasa de crecimiento de equilibrio positiva resultado de la acumulación endógena de conocimiento. En la literatura de crecimiento exógeno el progreso tecnológico se había tratado como un factor externo. Se considera que las externalidades tienen su origen en la acumulación de capital (K), esto es, son producto de K . En cuanto al factor K no es únicamente capital

⁵⁰ Romer, P., Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy*, October, 1986.

físico, se habla en realidad de “El Conocimiento”, aunque se haga referencia al capital físico. En este caso Romer considera que el stock de capital puede servir como indicador del stock de conocimiento. Cabe señalar que las condiciones del mercado en el modelo indican que a nivel empresa predominan los rendimientos constantes a escala pero indudablemente vinculados con externalidades positivas de la inversión. Se muestra una especie de reconciliación entre rendimientos crecientes y constantes, donde a nivel agente existen rendimientos no crecientes a escala y al nivel agregado son crecientes. Debido a esto último se genera un beneficio conjunto del que ningún agente puede sacar provecho.

Respecto a las externalidades producto de la acumulación de capital físico se argumenta de dos formas. Una es la que se refiere a las relaciones intra-industriales. La acumulación de capital físico en un sector industrial hace necesario el capital de otros sectores industriales. El otro enfoque es el *learning by doing* propuesto por Romer. Cuando las empresas acumulan capital (K) al mismo tiempo acumulan conocimiento (aprender en la práctica), expresado de otra manera, el stock de capital es una aproximación de aprendizaje o experiencia adquirido en el procesos de producción anteriores. Bajo el supuesto de acceso libre a la información, las firmas obtienen beneficios de este conocimiento. En resumen los rendimientos crecientes producto de la difusión de conocimiento es lo que está detrás del crecimiento. El caso básico se presenta de manera formal a continuación. Sea la siguiente función de producción

$$y_{t,j} = Z_t F(k_{t,j}, \ell_{t,j}) \quad (1.34)$$

Donde el progreso tecnológico como trabajo aumentado⁵¹ se representa por Z_t . En la versión básica no se considera la depreciación, así que la acumulación de capital de las j firmas es de acuerdo a

$$\dot{k}_{t,j} = i_{t,j} \quad (1.35)$$

En el caso de las empresas y los individuos estos se distribuyen de manera que la masa total de ellos es 1, y se supone que no hay crecimiento poblacional. De acuerdo a lo anterior la inversión se puede expresar de manera agregada de la siguiente manera

$$I_t = \int_0^1 i_{t,j} dj \quad (1.36)$$

Un supuesto fundamental es que para Romer el stock de conocimiento en la economía es una proporción de la inversión agregada pasada (nuestra aportación va en este sentido)

$$\kappa_t = \int_{-\infty}^t I_v dv \quad (1.37)$$

Esta inversión agregada es, dice Romer, idéntica al tamaño del stock de capital agregado

$$K_t = \int_{-\infty}^t I_v dv \quad (1.38)$$

⁵¹ Barro, R.J. y Sala-i-Martin, X., *Economic Growth*, Boston: MIT Press, 1999

Entonces, Romer parte del supuesto fundamental de que el stock de conocimiento determina la productividad por medio de

$$Z_t = \kappa_t^\eta \quad (1.39)$$

El progreso tecnológico está determinado por la inversión agregada pasada donde $\eta < 1$. Dejando a un lado el subíndice t , Romer expresa la función de producción Cobb-Douglas a nivel firma como sigue

$$y_i = k_i^\alpha \ell_i^{1-\alpha} \kappa_t^\eta \quad (1.40)$$

La cual exhibe retornos constantes a escala (CRS) a nivel empresa en (k, ℓ) manteniendo fijo el conocimiento agregado. Dicho lo anterior el producto agregado es

$$Y = K^\alpha L^{1-\alpha} \kappa^\eta \quad (1.41)$$

Al dividir entre L encontramos la función de producción per cápita

$$y = k^\alpha \kappa^\eta \quad (1.42)$$

Se asume que los hogares maximizan una función de utilidad que muestra aversión relativa al riesgo constante (CRRA) y que cada hogar ignora el efecto trivial que sus decisiones de inversión tienen en el conocimiento agregado. Para solucionar el problema se plantea el hamiltoniano⁵² en valor presente y normalizamos la ecuación (1.40) suponiendo que la cantidad agregada de trabajo es $L_t = 1$

$$H = e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda [k_{t,j}^\alpha \kappa_{t,j}^\eta - C] \quad (1.43)$$

Y de acuerdo a las condiciones de primero orden (CPO)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial C} &= 0; & u'(C)e^{-\rho t} &= \lambda \\ -\frac{\partial H}{\partial K} &= \dot{\lambda}; & \dot{\lambda} &= -\lambda \alpha k_{t,j}^{\alpha-1} \kappa_{t,j}^\eta \end{aligned} \quad (1.44)$$

De la misma manera que en el modelo de Rebelo si en (2.44) tomamos la derivada con respecto a t de la primera ecuación y el resultado lo sustituimos en la segunda

$$\dot{\lambda} = u''(C) \dot{C} e^{-\rho t} - \rho u'(C) e^{-\rho t}$$

⁵² En este modelo también consideramos que el capital se acumula de acuerdo a $\dot{K} = Y - C$

Como $\dot{\lambda} = -\lambda \alpha k_{t,j}^{\alpha-1} \kappa_{t,j}^{\eta}$ y $\lambda = u'(C) e^{-\rho t}$

$$-u'(C) e^{-\rho t} \alpha k_{t,j}^{\alpha-1} \kappa_{t,j}^{\eta} = u''(C) \dot{C} e^{-\rho t} - \rho u'(C) e^{-\rho t}$$

$$\alpha k_{t,j}^{\alpha-1} \kappa_{t,j}^{\eta} = \rho - \frac{u''(C) \dot{C}}{u'(C)} \quad (1.45)$$

Del mismo modo que en el modelo anterior, por las propiedades de la función de utilidad instantánea, $\theta = -u''(C) C / u'(C)$ que es también la elasticidad de la utilidad marginal. Sustituyendo el valor de θ en (1.45) podemos encontrar la tasa de crecimiento del consumo

$$\frac{\dot{C}_{t,j}}{C_{t,j}} = \frac{1}{\theta} [\alpha k_{t,j}^{\alpha-1} \kappa_{t,j}^{\eta} - \rho] \quad (1.46)$$

Si ahora suponemos que todos los hogares son idénticos y que $\kappa_t = K_t$, lo que significa que el consumo agregado per cápita se puede expresar como

$$\frac{\dot{C}_{t,j}}{C_{t,j}} = \theta^{-1} [\alpha k_{t,j}^{\alpha+\eta-1} - \rho] \quad (1.47)$$

De la ecuación (1.47), se pueden observar básicamente 3 casos.

- i) La trayectoria de crecimiento balanceado ocurre cuando $\alpha + \eta = 1$, de esta manera

$$\frac{\dot{C}_{t,j}}{C_{t,j}} = \theta^{-1} [\alpha - \rho] \quad (1.48)$$

que es cuando nos referimos a rendimientos a escala constantes sobre los factores acumulables: conocimiento privado y conocimiento global. En esta variante del modelo no hay dinámica transitoria. Cualquier condición inicial conduce a una trayectoria constante. La tasa de crecimiento depende del grado de impaciencia θ y de la participación del capital en el producto α . Si reescribimos el hamiltoniano (ecuación (1.48) de la siguiente manera

$$H = e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda [k_{t,j}^{\alpha+\eta} - C] \quad (1.49)$$

Lo cual equivale a decir que se consideran los spillovers que surgen de la inversión. Se trata de la tasa de crecimiento si un planeador social escoge el nivel de inversión. Al resolver el hamiltoniano

$$\frac{\dot{C}_{t,j}}{C_{t,j}} = \theta^{-1}[(\alpha + \eta)k_{t,j}^{\alpha+\eta-1} - \rho] \quad (1.50)$$

Si consideramos que $\eta > 0$, es mas grande que (1.47). Esto se debe a que los agentes privados fallan en considerar los efectos de su inversión en el capital agregado y por lo tanto en learning by doing. Dicho de otra manera, los agentes se equivocan al no interiorizar los spillovers en la producción, de esta manera ellos sub-invierten y por lo tanto sub-crecen.

ii) Si $\alpha + \eta < 1$

Aquí el modelo trata con rendimientos de escala decrecientes sobre los factores acumulables. En este caso el modelo es idéntico al modelo estándar de crecimiento exógeno. El crecimiento se frena cuando la productividad marginal privada del capital es igual a la tasa de descuento. La externalidad positiva no es suficiente para compensar el efecto de los rendimientos marginales decrecientes.

iii) Si $\alpha + \eta > 1$

Cuando esto sucede el modelo se refiere a una función de producción con rendimientos crecientes sobre los factores acumulables. Bajo estas circunstancias la tasa de crecimiento aumenta de forma constante y tiende hacia el infinito. El modelo diverge.

Existe crecimiento en los casos i) y iii). Esto se debe al aumento en el stock de capital que origina una mayor relación capital-trabajo, ya que se ha considerado a la población constante. En el primer caso se reproduce el resultado del modelo de Solow: no hay progreso técnico, no hay tampoco crecimiento. En el caso tercero, el crecimiento es explosivo.

1.2.2. Crecimiento económico endógeno y Learning-by-doing

Cuando se piensa en el crecimiento endógeno y en learning-by-doing con actividad en I+D esto puede generar dos tipos de progreso tecnológico: invención e innovación (Murat 2005). Lo importante del argumento anterior radica en que el progreso técnico desincorporado, en la forma de learning-by-doing es combinado con I+D. Esto puede generar una incorporación en mayor o menor grado del cambio tecnológico. El progreso técnico incorporado en los modelos ha mostrado su influencia en el crecimiento económico de largo plazo (Arrow 1962, Lucas 1988, Romer 1990).

Existen dos principales visiones al respecto. Una de ellas expone la distinción entre invención e innovación sin incorporar el learning-by-doing (Jovanovic y Rob 1990). La discusión se centra en que los esfuerzos en I+D se manejan de tal manera que generan un trade-off entre el prospecto de mayores nuevos descubrimientos contra el refinamiento de pasados descubrimientos. Matsuyama (1999) desarrolla un modelo de crecimiento cíclico en el cual las innovaciones se dan en cúmulos (clusters).

La otra visión combina learning-by-doing y crecimiento económico con invención o innovación. Al combinar learning-by-doing con invención Young (1993) muestra que la experiencia de aprender y la actividad inventiva se pueden alternar para imponer restricciones a la capacidad

de la economía para crecer. Otro ejemplo es Stein (1997) quien en un modelo de innovación con spillovers de conocimiento donde una firma ya establecida saca ventaja del learning-by-doing sobre los posibles entrantes. El modelo genera clusters de innovación porque, cuando una nueva firma desplaza a una establecida, un shock ocurre en la industria, debido a que posibilita a firmas entrantes a desplazar a la nueva firma, la cual tiene menos ventaja de conocimiento acumulado que la previa establecida. En el caso de Murat (2005) este combina invención e innovación con learning-by-doing. Se enfoca en la relación entre learning-by-doing e I+D.

1.2.3 Las tres etapas de desarrollo (síntesis de Funke y Strulik)

Funke y Strulik relacionan cada uno de los modelos de crecimiento con cada etapa de transición por la que atraviesa una economía en su proceso de desarrollo. Así, según estos autores, todos los modelos de crecimiento descritos resultan válidos, y la pertinencia del uso de uno u otro corresponde tan sólo a la etapa de desarrollo en la que se sitúen las economías que pretendan estudiarse. Las principales características del modelo que, según estos autores, mejor describe cada etapa de desarrollo son el mecanismo impulsor del crecimiento, el tipo de región a que debe aplicarse y el futuro esperable a largo plazo por cada economía estudiada quedan recogidos en la tabla 1.3.

Tabla 1.3. Las tres etapas de desarrollo (síntesis de Funke y Strulik)⁵³

Etapa de desarrollo	1: el modelo neoclásico
Equivalencia en la literatura	Solow (1956), con las extensiones de Cass (1965) y Koopmans (1965).
Motor del crecimiento	Progreso técnico exógeno.
Tipo de país/región	Países pobres.
Futuro a largo plazo	Crecimiento sólo a través del progreso técnico exógeno, o estancamiento.
Etapa de desarrollo	2: la acumulación de capital físico y humano
Equivalencia en la literatura	Uzawa (1965), Lucas (1988) y Romer (1986).
Motor del crecimiento	Acumulación de factores y mejora en la calidad del trabajo.
Tipo de país/región	Economías en desarrollo,

⁵³ Fuente: Funke, M y H. Strulik, “On endogenous growth with physical capital, human capital and product variety”, *European Economic Review*, 44, 2000, pp. 491-515. Tomado de “EL FACTOR ESPACIAL EN LA CONVERGENCIA DE LAS REGIONES DE LA UE: 1980-1996” Tesis doctoral Defendida el 10 de octubre de 2001 por M^a Amparo Toral Arto

<p>Futuro a largo plazo</p>	<p>no innovadoras, con tasas elevadas de acumulación de capital físico y no físico.</p> <p>Convergencia hacia crecimiento común, proporción K/H común y ratio K/Y común.</p> <p>Para dos países con misma proporción K/H (y mismo crecimiento, por lo tanto), el que tenga una dotación inicial inferior en K y H nunca logrará alcanzar al otro.</p> <p>Además, para dos países idénticos, aquel que tenga una dotación inicial absoluta en capital humano mayor llegará antes al punto de transición hacia una economía innovadora.</p>
<p>Etapa de desarrollo</p> <p>Equivalencia en la literatura</p> <p>Motor del crecimiento</p> <p>Tipo de país/región</p> <p>Futuro a largo plazo</p>	<p>3: la innovación</p> <p>Grossman y Helpman (1991), aumentado con Lucas (1988).</p> <p>Innovación, conseguida a través de la acumulación del conocimiento.</p> <p>Economías totalmente industrializadas que van hacia una estado estacionario con incrementos perpetuos en la generación de ideas.</p> <p>Convergencia hacia el crecimiento de la renta común, y un ratio conocimiento/ideas común.</p> <p>Aunque entre dos economías innovadoras, aquella que haya entrado antes en fase de economía innovadora, poseerá siempre un mayor stock de capital humano y tendrá, por tanto, una renta superior en términos absolutos a la otra economía, idéntica en el resto de términos.</p>

Crecimiento endógeno con dinámica tecnológica

En el modelo de Romer (1986) que se discutió en la sección 1.2.1, las externalidades relacionadas con la acumulación de conocimiento generan que el equilibrio óptimo competitivo no se alcance. El equilibrio de mercado conduce hacia un nivel de inversión inferior al óptimo de inversión social. Las críticas al modelo de Romer (1986) giran en torno a las externalidades que propician un crecimiento explosivo. En una abstracción más general, podemos decir, salvo el caso $\alpha + \eta = 1$ no existe trayectoria de crecimiento estable sostenido en el largo plazo, el cual existe bajo hipótesis muy restrictivas. Se dice que existe una manifiesta inestabilidad estructural en estos modelos reflejada en el crecimiento explosivo. La idea que fundamenta a los modelos de crecimiento endógeno es sencilla: los nuevos conocimientos nacen de los conocimientos previos; crecen de acuerdo a la inversión en I+D. A decir de algunos es necesario fundamentar esta idea con trabajos de historia de la tecnología.

2.1. El modelo $\hat{A}pk$

En este trabajo consideramos la aplicación del principio de heredad al problema del catch up tecnológico. Este último se refiere al proceso por el cual los países se pueden beneficiar de la existencia de un stock de producción de conocimiento disponible en el resto del mundo. Cuando el catch up acontece se espera que los países más pobres experimenten un más rápido crecimiento económico. En esta investigación se busca verificar si son las brechas tecnológicas y de innovación, en especial, la brecha en el nivel de patentes las cuales están fuertemente relacionadas con las divergencias entre países en desarrollo y países desarrollados. Las posibilidades de catch up en una industria de alta tecnología para países en desarrollo pueden solamente ser explicadas con tasas de crecimiento más alta que aquellas registradas por los países industrializados, esto amen a un importante desarrollo de capacidades tecnológicas e industriales. La correlación entre I+D y patentes, es un factor que puede contribuir a explicar la dinámica de convergencia tecnológica. Explicado de otra manera significa entender el

desempeño de la capacidad de innovación (capacidad de patentado en nuestro caso). En tal situación la convergencia lleva a crear un círculo virtuoso que junto a la transferencia tecnológica y crecimiento en la productividad, pudiera llevar a los países en desarrollo a una trayectoria de convergencia y catch up. Una parte central a examinar en este trabajo es la trayectoria que sigue la producción de patentes y como está determina si es posible la convergencia. Esto como ya lo mencionamos en la introducción a este trabajo, implica asumir que la tecnología no es una constante como suponen los modelos (Solowianos y endógenos). Si el crecimiento del stock de patentes (proyectos terminados) en el tiempo únicamente depende del conocimiento en el periodo t , significa que no existe efecto heredado del pasado (la integral de la ecuación(1)). Al no considerar gasto en I+D, daría como resultado que el número de patentes por año decrece a una tasa constante a ⁵⁴. Sin nuevas ideas no hay avance, $\dot{p}(t)$ es por lo tanto decreciente

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -ap(t) \\ p(t) &= p(0)e^{-at}\end{aligned}\tag{2.1}$$

La última ecuación de (2.1) nos dice que en el largo plazo la producción de conocimiento será nula. Sin embargo el factor hereditario implica considerar el pasado en la trayectoria seguida por las patentes en un periodo en tiempo $[\tau, t]$, de esta forma tenemos que

$$\dot{p}(t) = -ap(t) + \int_0^t H(t-\tau)p(\tau)d\tau\tag{2.2} \quad a > 0$$

En (2.2) el factor de herencia $H(t-\tau)$ puede ser el capital $K(t)$, una constante o una tasa de descuento como en el ejemplo de Romer . De la misma manera que en el modelo de Volterra, la trayectoria del nivel de patentes a lo largo de un periodo de tiempo se explica por el nivel de patentes en el periodo t , la posición de $p(t)$ en el presente más la trayectoria de la correlación patentes y otros factores en el tiempo. El comportamiento de la solución de (2.2) determinará la posibilidad de catch up. Como las patentes son un bien no rival, son insumo para producir bienes y para producir conocimiento.⁵⁵ El capital $K(t)$ se destina a la producción de bienes

$$Y(t) = [p(t)K(t)]^\alpha [AL]^{1-\alpha}\tag{2.3}$$

$K_{ID}(t)$ es la parte del capital destinada a la investigación y desarrollo que aunado al conocimiento disponible es fuente de progreso técnico

$$A = B[p(t)K_{ID}(t)]^\theta, B > 0\tag{2.4}$$

El resto de las ecuaciones son

⁵⁴ En la ecuación (2.1), a es la tasa de decrecimiento. Sin embargo en la ecuación (2.2) tal tasa bien podría estar relacionada con un trade-off de inversión hacia otros sectores de la industria más rentables.

⁵⁵ Un ejemplo es Romer (1986). El conocimiento creado por cada empresa contribuye en forma directa, tanto a la producción como a la producción de conocimiento. Este conocimiento agregado también es una externalidad para todas las demás empresas.

$$\dot{K} = sY(t) - \delta K(t) \quad (2.5)$$

$$\dot{L}(t) = nL(t) \quad (2.6)$$

Con $n > 0$ $s > 0$ y $\delta > 0$. La ecuación (2.5) se refiere a la inversión y la ecuación (2.6) modela el crecimiento del trabajo. Las ecuaciones (2.1) a (2.6) modelan la economía.

Fundamentos de la teoría de las ecuaciones integrales

Existen relaciones cercanas entre la teoría de las ecuaciones integrales y diferentes áreas de las matemáticas, por ejemplo las ecuaciones diferenciales y la teoría de operadores. En buena parte de los problemas en las áreas de ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias se pueden replantear como una ecuación integral. Es más, muchos de los resultados de la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales pueden derivarse de los correspondientes en ecuaciones integrales. Incluso se afirma que “en muy pocas áreas de matemáticas aplicadas y física matemática las ecuaciones integrales no están involucradas”⁵⁶. Se puede ver el tema de las ecuaciones integrales o integro-diferenciales como una extensión del álgebra lineal y un precursor del análisis funcional moderno. En particular cuando se trata de ecuaciones integrales lineales los conceptos fundamentales de espacios vectoriales lineales, los eigenvalores y eigenfunciones⁵⁷ jugarán un rol relevante.”⁵⁸.

⁵⁶ Hochstadt, Harry, *Integral equations*, John Wiley and Sons, Inc., USA, 1973 cap I.

⁵⁷ Considérese el operador diferencial de segundo orden en forma auto adjunta

$$L \equiv \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) , \quad (I)$$

donde $p(x) \in C^1(a,b)$ y $q(x) \in C(a,b)$. Donde $C(a,b)$ el conjunto de funciones de variable real definidas y continuas en el intervalo (a,b) , es un espacio vectorial. Del mismo modo $C^1(a,b)$ representa un espacio vectorial pero de aquellas funciones con primeras derivadas definidas y continuas en el intervalo (a,b) . Considérese la ecuación homogénea

$$Lu = \lambda r(x)u \quad (II)$$

donde $r(x) \in C(a,b)$ y λ es una constante. La constante λ para la cual una solución no trivial a (II) existe es llamada un eigenvalor de L , y la solución $u(x) \in C^2(a,b)$ correspondiente a λ es llamada una eigenfunción. Ver más detalles en Atassi H. M. “Linear operators and linear equations” (class note). University Notre Dame. Department of Aerospace and mechanical engineering. <http://www.nd.edu/~atassi/Teaching/ame60612/Notes/linop.pdf> (24 de Enero de 2011)

Como es conocido, existen diversas clases de ecuaciones integrales lineales, las más frecuentemente estudiadas para Hochstadt⁵⁹ son:

$$\int_a^b K(t,s)\phi(s)ds = f(t) \quad (3.1)$$

$$\phi(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\phi(s)ds = f(t) \quad (3.2)$$

$$a(t)\phi(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\phi(s)ds = f(t) \quad (3.3)$$

Las ecuaciones (3.1) a la(3.3) se conocen generalmente como ecuaciones de Fredholm de primera, segunda y tercera clase, respectivamente. En el caso del intervalo (a,b) , bien puede ser reemplazado por $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, o $(-\infty, \infty)$ con a y b finitos. Si $a(t)$ es no nulo se puede dividir (3.3) por $a(t)$ y reducir este a(3.2). Se presume que las funciones $f(t), a(t)$ y $K(t,s)$ son conocidas, mientras $\phi(t)$ es desconocida. A la función $K(t,s)$ se le conoce como kernel de la ecuación. Una segunda clase de ecuaciones son las ecuaciones de Volterra de primera, segunda y tercera clase, definidas a continuación

$$\int_a^x K(t,s)\phi(s)ds = f(t) \quad (3.4)$$

$$\phi(t) - \lambda \int_a^x K(t,s)\phi(s)ds = f(t) \quad (3.5)$$

$$a(t)\phi(t) - \lambda \int_a^x K(t,s)\phi(s)ds = f(t) \quad (3.6)$$

Las ecuaciones de Volterra además, representan casos especiales de las de Fredholm. Estas últimas se reducen a su correspondiente ecuación de Volterra si $K(t,s) = 0$ para $s > t$. No obstante las ecuaciones de Volterra tienen propiedades que no surgen de la teoría general de las ecuaciones de Fredholm, por lo que un análisis por separado es obligado. Por último, existe

El problema anterior es conocido como problema de Sturm-Liouville (S-L). La función $r(x)$ se conoce como función de densidad y λ son los valores propios del problema de valores en la frontera. El valor de λ no se conoce. Encontrar estos valores para una solución no trivial de (II) es el problema de (S-L). Ejemplo: $f_k(x) = e^{kx}$ es una eigenfunción para el operador diferencial $A = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}$ para cualquier valor de k . Esto es, $Ae^{kx} = \lambda e^{kx}$ con $\lambda = k^2 - k$ su correspondiente eigenvalor.

⁵⁸ Hochstadt, Harry, *Integral equations*, John Wiley and Sons, Inc., USA, 1973 cap I. pp 2

⁵⁹ Idem

algo en común entre las ecuaciones (3.1) a la (3.6) y es que todas ellas son ecuaciones lineales. Dicho de otra manera, la función ϕ entra en las ecuaciones de forma lineal, esto es

$$\int_a^x K(t,s)[c_1\phi_1(s) + c_2\phi_2(s)]ds = c_1 \int_a^b K(t,s)\phi_1(s)ds + c_2 \int_a^b K(t,s)\phi_2(s)ds \quad (3.7)$$

Dentro de la muy extensa teoría de las ecuaciones integrales de Volterra, nos ocuparemos de lo que se refiere las ecuaciones escalares integro-diferenciales de Volterra. En particular nos interesan las conocidas como de “tipo convolución”.

Para finalizar esta introducción nos parece importante señalar lo expuesto por T.A. Burton ⁶⁰ en relación a la teoría que involucra a las ecuaciones de Volterra:

Aunque la teoría de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales de Volterra es vieja, bien desarrollada y densa en literatura y aplicaciones, no nos ha sido posible encontrar un tratamiento sistemático de las estructuras básicas de la teoría y propiedades de estabilidad...Existen de acuerdo, numerosos tratamientos de la materia, pero ninguno parece presentar un conjunto coherente de resultados paralelo al tratamiento estándar de la teoría de estabilidad dada en ecuaciones diferenciales ordinaria...Por ejemplo Miller (1971a, p.9) argumenta: “Mientras es verdad que todos los problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser considerados como una ecuación integral de Volterra, ese hecho es de limitada importancia”. Nuestra visión es que este hecho es de fundamental importancia, y consecuentemente, es nuestra meta desarrollar la teoría de las ecuaciones de Volterra de tal manera que el investigador en el área de ecuaciones diferenciales ordinarias, pueda valerse de su experiencia en una comprensión de las ecuaciones de Volterra. Nos apresuramos a decir que existen, de hecho, áreas en las ecuaciones de Volterra que son paralelas a la teoría estándar de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En nuestro trabajo nos interesa resolver una ecuación escalar integro-diferencial de Volterra de tipo convolución (para las que no son de tipo convolución existe otro análisis). Un problema que resulta en un caso particular de la teoría de las ecuaciones integrales e integro diferenciales de Volterra. Para hablar de tales ecuaciones, estamos obligados a por lo menos una introducción a la teoría de las ecuaciones integrales lineales que fundamente las soluciones de la ecuación (2.54). A continuación mostraremos de forma general la conexión entre ecuaciones integrales e integro-diferenciales y las ecuaciones diferenciales ordinarias finalizando con un análisis de la convergencia y estabilidad de las soluciones.

3.1. Aspectos fundamentales a considerar en la teoría de las ecuaciones integrales.

Las ecuaciones integrales son de considerable importancia en matemáticas. Las transformadas integrales de Laplace y Fourier son ejemplos de ecuaciones integrales (de primera clase)

⁶⁰ Burton, T.A. “Volterra Integral and Differential equations. Department of mathematics Southern Illinois University Carbondale, Illinois. Second Edition. El Sevier 2005. Cap 0.

$$\Phi(u) = \int_0^{\infty} e^{-xu} \phi(x) dx$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \phi(x) dx$$
(3.8)

De ellas Laplace uso la primera ecuación para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)⁶¹. Para el caso de las ecuaciones integrales de segunda clase, lineales, la teoría corresponde a Volterra y Fredholm⁶². Nuestra muy particular ecuación de Volterra pertenece a esta última clase, las cuales son a su vez ecuaciones integrales lineales. Es por aquí por donde es necesario comenzar. Para nuestro fin hemos dividido nuestra introducción a la teoría de ecuaciones integrales lineales en tres ejes: los espacios de Hilbert, los operadores lineales y la resolvente.

Espacios de Hilbert⁶³

Un espacio de Hilbert se puede entender como una generalización del espacio tridimensional Euclidiano. Se refiere a vectores de infinitas dimensiones, donde en el caso de las ecuaciones integrales es un espacio lineal completo compuesto de funciones de cuadrado integrable con la propiedad de la distancia definida en términos de un producto interno.

En el espacio tridimensional un punto es definido por un conjunto ordenado de números reales o coordenadas (x_1, x_2, x_3) que son las componentes de un vector de posición X . Un vector λX tiene coordenadas $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ y para un vector suma $X+Y$ son $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ sus coordenadas correspondientes.

El producto escalar o interno entre vectores se define como

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$
(3.9)

Donde estos vectores son ortogonales si $(X, Y) = 0$. Además $(X, X) \geq 0$ y si $(X, X) = 0$ entonces $X = (0, 0, 0)$ el vector cero. La magnitud o norma de X se escribe $\|X\|$ y se define como

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < \infty$$
(3.10)

Un vector X se dice normalizado si $\|X\| = 1$ y se conoce como vector unitario. La distancia entre dos puntos definidos por los vectores X e Y se define $\|X - Y\|$. La ecuación (3.10) representa la distancia del punto X al origen representado por el vector cero.

⁶¹ Deakin, M. The development of the Laplace transform 1737-1937, I. Euler to Spitzer, 1737-1880. Arch. Hist. 1981

⁶² Hazewinkel, Michiel. Integral Equations. Encyclopaedia of Mathematics Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2002. <http://eom.springer.de/I/i051400.htm> (11 de Enero 2011)

⁶³ Existe amplia bibliografía referente a los espacios de Hilbert. Para esta sección nos apoyamos por conveniencia en Moiseiwitsch, Benjamin Lawrence. Integral equation. Longman Mathematical Texts. 1977. cap VI

La distancia entre X e Y nos lleva a la desigualdad del triángulo, donde un lado es menor o igual a la longitud de los restantes cuando el triángulo se colapsa

$$\|X-Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad (3.11)$$

Supongamos que los vectores X, Y, Z son linealmente independientes, por lo tanto $\lambda X + \mu Y + \nu Z$ no es el vector cero a menos que $\lambda = \mu = \nu = 0$. Si lo anterior es cierto X, Y, Z pueden formar un conjunto ortonormal (ortogonal y normalizado) de tres vectores (e_1, e_2, e_3) . Si utilizamos la ortogonalización de Gram-Schmidt y con

$$e_1 = \frac{X}{\|X\|},$$

un vector normalizado, encontramos

$$Y' = Y - (Y, e_1)e_1.$$

Donde Y' es ortogonal a e_1 y

$$e_2 = \frac{Y'}{\|Y'\|},$$

es un vector normalizado. Para el último vector tenemos que $Z' = Z - (Z, e_1)e_1 - (Z, e_2)e_2$ es ortogonal a e_1, e_2 y

$$e_3 = \frac{Z'}{\|Z'\|}$$

es también un vector normalizado. Los vectores (e_1, e_2, e_3) así obtenidos forman una base en el espacio tridimensional. Un vector $a \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal

$$a = (a, e_1)e_1 + (a, e_2)e_2 + (a, e_3)e_3$$

Podemos ahora extender lo anterior a un espacio n -dimensional finito cuyos puntos se definan como conjuntos ordenados de n números complejos $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. El producto interno es ahora

$$(X, Y) = \sum_{r=1}^n x_r \bar{y}_r = \overline{(Y, X)} \quad (3.12)$$

Por otro lado la norma de X es

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{\sum_{r=1}^n |x_r|^2} < \infty \quad (3.13)$$

Un conjunto ortonormal de n vectores $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ forman una base del espacio n -dimensional. De esta manera cualquier vector $a \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar como

$$a = \sum_{r=1}^n (a, e_r) e_r$$

Donde $a_r = (a, e_r)$, con $r = 1, 2, 3, \dots, n$ son los componentes del vector a con relación a los de la base. Adicionalmente podemos decir que el vector cero es el único vector ortogonal a cada uno de los vectores de la base. De este modo $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ llevan a que el vector a definido anteriormente sea $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Daremos un paso más en nuestra definición de espacios de Hilbert al generalizar al espacio de dimensión infinita. Considérese el vector X que tiene por componentes o coordenadas una secuencia infinita de números complejos $\{x_r\} = (x_1, x_2, \dots, x_r, \dots)$ que satisfacen

$$\sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^2 < \infty \quad (3.14)$$

Si revisamos la definición de producto escalar encontramos que

$$(X, Y) = \sum_{r=1}^{\infty} x_r \bar{y}_r = \overline{(Y, X)} \quad (3.15)$$

De lo cual vemos que $0 \leq (X, X) \leq \infty$ y $(X, X) = 0$ si y solo si $X=0$. La norma se define por la fórmula

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^2} \quad (3.16)$$

Nuevamente $\|X\| = 0$ si y solo si $X=0$.

El producto por un escalar tiene por componentes $\{\lambda x_r\}$, de tal manera que $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$. La suma de vectores tiene por componentes $\{x_r + y_r\}$ de la misma manera que el espacio dimensional finito. Ahora por la desigualdad de Cauchy

$$\sum_{r=1}^{\infty} |x_r| |y_r| \leq \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^2\right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} |y_r|^2\right)} \quad (3.17)$$

y usando el hecho de que

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} x_r \bar{y}_r \right| \leq \sum_{r=1}^{\infty} |x_r| |\bar{y}_r| \quad (3.18)$$

Obtenemos la desigualdad de Schwarz

$$|(X, Y)| = \|X\| \|Y\| \quad (3.19)$$

Que no es sino la generalización al espacio infinito del resultado en tres dimensiones donde el producto interno es tal que

$|(x, y)| = \|x\| \|y\| \alpha$, con α ángulo entre x e y . Por otro lado para vectores en el espacio infinito

$$\begin{aligned} \|X+Y\|^2 &= \sum_{r=1}^{\infty} |x_r + y_r|^2 \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^2 + \sum_{r=1}^{\infty} x_r \bar{y}_r + \sum_{r=1}^{\infty} \bar{x}_r y_r + \sum_{r=1}^{\infty} |y_r|^2 \\ &= \|X\|^2 + 2\|X\| \|Y\| \cos \alpha + \|Y\|^2 \\ &= (\|X\| + \|Y\|)^2 < \infty \end{aligned}$$

De esta manera

$$\sum_{r=1}^{\infty} |x_r + y_r|^2 < \infty \quad (3.20)$$

De lo anterior surge la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} \|X+Y\| &\leq \|X\| + \|Y\| \\ \|X-Y\| &\leq \|X\| + \|Y\| \end{aligned} \quad (3.21)$$

La distancia entre dos puntos tiene su correspondiente fórmula en

$$d(X, Y) = \|X-Y\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} |x_r - y_r|^2} \quad (3.22)$$

Donde $\|X\|$ es la distancia del punto X al origen, definido por el vector cero.

Cerramos esta sección sin olvidar un asunto fundamental en cuanto a los vectores en el espacio de dimensión infinita. Se dice que una secuencia de vectores $\{X_n\}$ converge fuertemente a un vector límite X si para un $\varepsilon > 0$ dado, existe N , tal que para $n > N$ se tiene que

$$\|X_n - X\| < \varepsilon$$

La convergencia fuerte se define $X_n \rightarrow X$. Para la desigualdad del triángulo, si $X_n \rightarrow X$

$$\begin{aligned}\|X_n - X_m\| &= \|X_n - X + X - X_m\| \\ &\leq \|X_n - X\| + \|X - X_m\| < \varepsilon\end{aligned}$$

Con n y m suficientemente grandes. Una secuencia $\{X_n\}$ que satisface $\|X_n - X_m\| < \varepsilon$ para n y m suficientemente grandes se conoce como secuencia de Cauchy.

Otro resultado importante a señalar es el caso opuesto: cada secuencia de Cauchy tiene un vector X límite en el espacio.

La demostración al argumento anterior es sencilla. Sabemos que los vectores unitarios en el espacio dimensional infinito $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_r = (0, 0, 0, \dots, 1)$, ... forman una base canónica la cual puede generar el espacio. Por lo anteriormente planteado podemos expresar cualquier vector, digamos el vector $a = (a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ como lo hicimos con el espacio n -dimensional, de tal manera que

$$a = \sum_{r=1}^{\infty} a_r e_r$$

Donde $a_r = (a, e_r)$ y e_r es el r -ésimo vector unitario que cumple con $\|e_r\| = 1$. Como se estableció más arriba, una secuencia de vectores $\{X_n\}$ es de Cauchy si satisface

$$|(X_n, e_r) - (X_m, e_r)| = |(X_n - X_m, e_r)| = \|X_n - X_m\| < \varepsilon$$

Para toda n y m suficientemente grande. Ahora pensemos en una secuencia de números tal que se cumple $(X_n, e_r) = x_r^{(n)}$ cuando $n \rightarrow \infty$, esto es, una secuencia de Cauchy con límite x_r ($r = 1, 2, \dots$). Vamos a expresar la condición de convergencia utilizando la secuencia anterior

$$\|X_n - X_m\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} |x_r^{(n)} - x_r^{(m)}|^2} < \varepsilon$$

Si lo anterior se cumple sabemos que para cada k

$$\sqrt{\sum_{r=1}^k |x_r^{(n)} - x_r^{(m)}|^2} < \varepsilon$$

tomando el límite cuando $m \rightarrow \infty$ y encontramos que

$$\sqrt{\sum_{r=1}^k |x_r^{(n)} - x_r|^2} < \varepsilon$$

nuevamente sabemos que si es válido para cada k , lo es para la condición de convergencia en el espacio de dimensión finita

$$\|X_n - X\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} |x_r^{(n)} - x_r|^2} < \varepsilon$$

Sin embargo

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^2} &= \|X\| = \|(X - X_n) + X_n\| \\ &\leq \|(X - X_n)\| + \|X_n\| \\ &< \varepsilon + \|X_n\| \end{aligned}$$

En consecuencia podemos decir que

$$\sum_{r=1}^{\infty} |x_r|^2 < \infty$$

Siguiendo con el resultado anterior $X = (x_1, x_2, \dots, x_r, \dots)$ pertenece al espacio de dimensión infinita y $X_n \rightarrow X$ conforme $n \rightarrow \infty$. Un espacio en el cual $X_n \rightarrow X$ cuando $\{X_n\}$ es una secuencia de Cauchy se llama completo. Si H es un espacio vectorial lineal⁶⁴ completo con una función distancia o métrica definida por un producto interno, H es un espacio de Hilbert. El espacio de secuencias anterior es un ejemplo de espacio de Hilbert y se denota l_2 .

Espacio de funciones

Para toda función compleja de variable real x definida en el intervalo $a \leq x \leq b$ y que satisface

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad (3.23)$$

esto es, $f(x)$ es de cuadrado integrable, el producto interno de $f(x)$, $g(x)$ está dado por

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (3.24)$$

La norma para $f(x)$ se define en este espacio como

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad (3.25)$$

Con (3.24) y (3.25) vamos a construir la desigualdad de Schwarz.

⁶⁴ Un espacio vectorial lineal, es un conjunto de elementos, que pueden ser puntos o vectores, f, g, h, \dots , que forma un grupo Abelian. El grupo Abelian satisface la ley conmutativa, asociativa de la adición (+), posee el elemento cero de (+) y un elemento inverso y donde además se satisface el producto por el campo de los números complejos, esto es, $1 \cdot f = f, 0 \cdot f = 0, (\lambda \mu) f = \lambda(\mu f)$.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \left| f(x) - \frac{(f, g)}{(g, g)} g(x) \right|^2 dx \geq 0 \\
& \int_a^b |f(x)\overline{f(x)}| dx - 2 \frac{|(f, g)|}{(g, g)} \int_a^b |f(x)\overline{g(x)}| dx + \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \int_a^b |g(x)\overline{g(x)}| dx \geq 0 \quad (3.26) \\
& (f, f) - 2 \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} + \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \geq 0 \\
& (f, f)(g, g) \geq |(f, g)|^2
\end{aligned}$$

Y de acuerdo a (3.25)

$$\|f\| \|g\| \geq |(f, g)| \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) se conoce como la desigualdad de Schwarz para funciones de cuadrado integrable. Continuando con (3.27)

$$\begin{aligned}
(\|f\| + \|g\|)^2 &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \|g\| \\
&\geq (f, f) + (g, g) + 2|(f, g)|
\end{aligned}$$

Sin embargo (3.27) también se puede expresar como

$$|(f, g)| \geq (f, g) + \overline{(f, g)}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
(\|f\| + \|g\|)^2 &\geq (f, f) + (g, g) + (f, g) + (g, f) \\
&= (f + g, f + g)
\end{aligned}$$

Así encontramos una importante desigualdad conocida como desigualdad de Minkowski o desigualdad del triángulo para funciones

$$\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\| \quad (3.28)$$

Dos últimas propiedades debemos mencionar. Se dice que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que pertenecen al espacio de funciones, son ortogonales si

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx = 0 \quad (3.29)$$

La función $f(x)$ y $g(x)$ se normaliza si $\|f\|=1$. Ahora, consideremos que el conjunto de funciones complejas continua por partes $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_r(x), \dots$ satisface la ecuación (3.29), esto es, que son ortogonales, por lo tanto se puede definir el producto interno como sigue

$$(\phi_r, \phi_s) = \phi_r, \phi_s \int_a^b \phi_r(x) \overline{\phi_s(x)} dx = \delta_{rs} \quad (3.30)$$

Donde δ_{rs} es la delta de Kronecker definida como sigue

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & (r = s) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases} \quad (3.31)$$

Al conjunto de funciones con estas propiedades se le conoce como ortonormal.

Operadores lineales en espacios de Hilbert

Una ecuación integral de la forma

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s)\phi(s) ds \quad (3.32)$$

Se conoce como de Volterra de segunda clase. Bajo el signo de la integral, $\phi(\cdot)$ es la función desconocida, si tal función pertenece a un espacio de Hilbert, entonces estaremos hablando de operadores integrales que se desempeñan en espacios de Hilbert de funciones.

Las ecuaciones integrales que son lineales como (3.32) involucran el operador integral lineal

$$L = \int_a^b K(x, s) ds \quad (3.33)$$

Donde $K(x, s)$ es el kernel. Este operador satisface la condición de linealidad

$$L[\lambda_1 \phi_1(s) + \lambda_2 \phi_2(s)] = \lambda_1 L[\phi_1(s)] + \lambda_2 L[\phi_2(s)] \quad (3.34)$$

Con λ_1 y λ_2 constantes. Aplicado esto a la función $\phi(\cdot)$ se expresa

$$L[\phi(s)] = \int_a^b K(x, s)\phi(s) ds \quad (3.35)$$

Las ecuaciones integrales lineales son de dos formas: las de Fredholm y las de Volterra. Las de Fredholm de primera clase tienen la forma

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)\phi(s)ds, \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.36)$$

Ejemplo de tales ecuaciones son las transformadas de Fourier y Laplace. Las de segunda clase son

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s)\phi(s)ds, \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.37)$$

Si $f(x) = 0$, la correspondiente ecuación homogénea es

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,s)\phi(s)ds, \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.38)$$

En el caso de las de Volterra, las de primera clase son de la forma

$$f(x) = \int_a^x K(x,s)\phi(s)ds, \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.39)$$

Las de segunda clase por otro lado son

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s)\phi(s)ds, \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.40)$$

La relación entre correspondientes ecuaciones de Fredholm y Volterra se establece si consideramos, $K(x,s) = 0$ para $a \leq x < s \leq b$. Una ecuación de Volterra de primera clase se puede transformar en una de segunda clase por diferenciar, esto es

$$f'(x) = K(x,x)\phi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,s)\phi(s)ds \quad (3.41)$$

Si $K(x,x) = 0$ en $a \leq x < s \leq b$, entonces

$$\phi(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_a^x \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{K(x,s)}{K(x,x)} \right] \phi(s)ds \quad (3.42)$$

Ecuaciones integrales de tipo convolución

Un tipo particular de kernel llama nuestra atención en esta investigación. Nos referimos a aquellos que tienen la forma

$$K(x,s) = K(x-s) \quad (3.43)$$

Que dependen únicamente de la diferencia entre las coordenadas x y s . Al llevar esto a la integral tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\phi(s)ds \quad (3.44)$$

Que se conoce como integral de convolución o de doblamiento. El nombre le viene de lo que se puede ver en una ecuación de Volterra, donde la integral es

$$\int_0^x K(x-s)\phi(s)ds \quad (3.45)$$

El rango de integración de la convolución se puede intuir de la siguiente forma: si un intervalo de 0 a x marcamos el punto $s = x/2$, esto es, la mitad del intervalo. De esta manera es fácil ver que $s = x - s$, es el promedio del intervalo de 0 a x ⁶⁵.

Las ecuaciones integrales de convolución se pueden resolver por medio de transformadas integrales como Fourier o Laplace. Por ejemplo, consideremos una ecuación de Fredholm de segunda clase como en (3.37)

$$\phi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\phi(s)ds, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3.46)$$

Para resolver (3.46) podemos considerar el uso de la transformada de Fourier para ϕ , f y K

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \phi(x) dx \\ F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx \\ K(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} K(x) dx \end{aligned} \quad (3.47)$$

Vamos a usar a continuación la propiedad de convolución de esta manera

$$\begin{aligned} K(u)\Phi(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\phi(s)ds \\ K(u)\Phi(u) &= \mathfrak{F} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\phi(s)ds \end{aligned} \quad (3.48)$$

Denotamos al operador integral de Fourier con $\mathfrak{F} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dx$. Finalmente, considerando (3.47) y (3.48) (se aplica transformada de Fourier en ambos lados)

⁶⁵ Ver apéndice B sobre la convolución.

$$\Phi(u) = F(u) + \sqrt{2\pi}K(u)\Phi(u) \quad (3.49)$$

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{1 - \sqrt{2\pi}K(u)}$$

La solución a (3.46) mediante la fórmula recíproca de (3.49) se expresa como sigue

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixu} F(u)}{1 - \sqrt{2\pi}K(u)} du \quad (3.50)$$

$$\phi(x) = \mathfrak{F}^{-1}[\Phi(u)]$$

Una ecuación integral de Fredholm de primera clase tiene la forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\phi(s)ds \quad (3.51)$$

Para encontrar una solución, nuevamente usamos el resultado de la integral de convolución visto en (3.48) lo que produce

$$F(u) = \sqrt{2\pi}K(u)\Phi(u) \quad (3.52)$$

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{\sqrt{2\pi}K(u)}$$

La incognita a resolver es $\phi(x)$. Como en el caso anterior la solución se alcanza mediante la transformada de Fourier

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{\sqrt{2\pi}K(u)}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixu} F(u)}{\sqrt{2\pi}K(u)} du \quad (3.53)$$

$$\phi(x) = \mathfrak{F}^{-1}[\Phi(u)]$$

Si ahora en (3.46), $f(x) = 0$, $K(x-s) = 0$ y $\phi(x) = 0$ para $x < 0$ obtenemos la ecuación integral

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-s)\phi(s)ds, \quad (x > 0) \quad (3.54)$$

que es una ecuación de Volterra de segunda clase con una integral de tipo convolución. Una alternativa para resolver la ecuación (3.54) es la transformada de Laplace

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \int_0^{\infty} e^{-ux} \phi(x) dx \\ F(u) &= \int_0^{\infty} e^{-ux} f(x) dx \\ K(u) &= \int_0^{\infty} e^{-ux} K(x) dx\end{aligned}\tag{3.55}$$

Si se aplica el teorema de convolución

$$K(u)\Phi(u) = L \int_0^x K(x-s)\phi(s) ds\tag{3.56}$$

en donde L representa el operador integral de Laplace

$$L = \int_0^{\infty} e^{-ux} dx\tag{3.57}$$

En la ecuación (3.54)

$$\Phi(u) = F(u) + K(u)\Phi(u)$$

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{1 - K(u)}\tag{3.58}$$

$$\Phi(u) = F(u) + F(u)M(u)$$

Por lo anterior la solución de (3.54) es

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x m(x-s)f(s) ds\tag{3.59}$$

Por último si en (3.51) $f(x) = 0$, $K(x-s) = 0$ y $\phi(x) = 0$ para $x < 0$ encontramos que

$$f(x) = \int_0^x K(x-s)\phi(s) ds\tag{3.60}$$

Es una ecuación de Volterra de primera clase donde $f(0) = 0$. Nuevamente de la transformada de Laplace (3.55) y el teorema de convolución,

$$F(u) = K(u)\Phi(u)$$

$$\phi(x) = L^{-1} \left\{ \frac{F(u)}{K(u)} \right\} \quad (3.61)$$

Funciones de cuadrado integrable

Si la función $\phi(x)$ es de cuadrado integrable satisface la ecuación (3.23), esto es

$$\int_a^b |\phi(x)|^2 dx < \infty$$

El kernel $K(x, s)$ definido en $a \leq x \leq b, a \leq s \leq b$ se dice de cuadrado integrable si cumple

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds < \infty \quad (3.62)$$

junto con

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds < \infty \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.63)$$

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 dx < \infty \quad (a \leq s \leq b)$$

El kernel se conoce como R^2 si la integral⁶⁶ es de Riemann o L^2 si es la integral de Lebesgue. El concepto anterior quizá pueda entenderse mejor con un contraejemplo. Considerese un kernel singular de tipo Volterra de la forma

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{F(x, s)}{(x-s)^\alpha} & x > s \\ 0 & x < s \end{cases} \quad (3.64)$$

con $F(x, s)$ continua y $0 < \alpha < 1$. Si $|F(x, s)| \leq M$, donde $M \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds = \int_a^b dx \int_a^x ds \frac{|F(x, s)|^2}{(x-s)^\alpha}$$

⁶⁶ El espacio de funciones de cuadrado integrable L^2 es un ejemplo de espacios de Hilbert. Ver apéndice para una elemental explicación de las integrales de Riemann y Lebesgue.

$$\begin{aligned}
&\leq M^2 \int_a^b dx \int_a^x ds (x-s)^{-2\alpha} \\
&= \frac{M^2}{1-2\alpha} \int_a^b dx \int_a^x ds (x-s)^{1-2\alpha} \\
&= \frac{M^2 (b-a)^{2-2\alpha}}{2(1-2\alpha)(1-\alpha)}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

La doble integral es por finita si $0 < \alpha < 1/2$. Si $\alpha = 1/2$ o $\alpha = 1$ por ejemplo, el kernel singular (3.64) no es de cuadrado integrable. Hay que señalar que una ecuación integral cuyo kernel no es de cuadrado integrable se dice a ser singular. También si el rango de la integral es $0 < x < \infty$ o $-\infty < x < \infty$ la ecuación es singular. Ninguna de las ecuaciones integrales o integro-diferenciales que estudiamos en este trabajo son singulares. En todos los casos el kernel se asume de cuadrado integrable. Volvamos a los operadores lineales. Considerese el operador

$$\mathbf{K} = \int_a^b K(x, s) ds \tag{3.66}$$

donde $K(x, s)$ es de cuadrado integrable y

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s) \phi(s) ds \tag{3.67}$$

del mismo modo que $K(x, s)$, $\phi(s)$ es de cuadrado integrable. En notación abreviada

$$\psi = \mathbf{K} \phi \tag{3.68}$$

\mathbf{K} es evidentemente lineal, ya que cumple

$$\mathbf{K}(\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2) = \lambda_1 \mathbf{K} \phi_1 + \lambda_2 \mathbf{K} \phi_2 \tag{3.69}$$

con λ_1, λ_2 constantes y ϕ_1, ϕ_2 y funciones de cuadrado integrable. Definimos el operador identidad \mathbf{I} , tal que $\mathbf{I} \phi = \phi$. En forma de operador integral

$$\mathbf{I} = \int_a^b \delta(x-s) ds \tag{3.70}$$

La función $\delta(x-s)$ es la delta de Dirac⁶⁷. Una representación comund ela delta es la siguiente

$$\delta(x) = \lim_{h \rightarrow 0} I(h, x)$$

Donde $I(h, x)$ es la función impulso

⁶⁷ Ver apéndice C para más detalles acerca de sus propiedades.

$$I(h, x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & 0 \leq x \leq h \\ 0 & \text{otra manera} \end{cases}$$

Otra propiedad importante es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} I(h, x) dx = 1$$

o dicho de otra manera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Para finalizar lo relacionado con los operadores lineales definimos la norma de (3.66) como sigue

$$\|\mathbf{K}\|_2 = \left[\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds \right]^{1/2} \quad (3.71)$$

asumiendo que $K(x, s)$ es de cuadrado integrable. Por otro lado si $\phi(s)$ es también una función de cuadrado integrable y $\psi = \mathbf{K}\phi$ esta dada por (3.67) utilizando la desigualdad de Schwarz tenemos

$$|\psi|^2 \leq \int_a^b |K(x, s)|^2 ds \int_a^b |\phi(s)|^2 ds \quad (3.72)$$

Al integrar ambos lados

$$\begin{aligned} \int_a^b |\psi|^2 dx &\leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(x, s)|^2 dx \int_a^b |\phi(s)|^2 ds \right] dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds \int_a^b |\phi(s)|^2 ds \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\|\psi\| \leq \|\mathbf{K}\|_2 \|\phi\| < \infty$$

por lo tanto $\psi(x)$ es de cuadrado integrable. Cuando $\|\mathbf{K}\|_2 = 0$, entonces $\|\psi\| = 0$ y \mathbf{K} es el operador nulo.

La Resolvente

La solución de una ecuación integral de segunda clase de Volterra puede ser expresada en términos de un kernel resolvente. Esto es de considerable relevancia debido a que se puede aplicar la fórmula de variación de parámetros⁶⁸ de las EDO.

El teorema de unicidad nos dice que si existe un kernel resolvente $R(x, s; \lambda)$ de $K(x, s)$ para un valor dado del parámetro λ , entonces es único. Supongase una ecuación integral lineal de Volterra de segunda clase

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, s)\phi(s)ds, \quad x > 0 \quad (3.74)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Ahora, mediante el operador integral, definido por la ecuación (3.66), reescribimos la ecuación (3.74) como sigue

$$\phi = f + \lambda K\phi \quad (3.75)$$

$$(I - \lambda K)\phi = f$$

Por otro lado existe un operador R definido por

$$R = \int_a^b R(x, s; \lambda)ds \quad (3.76)$$

tal que

$$\phi = f + \lambda Rf \quad (3.77)$$

$$\phi = (I + \lambda R)f$$

El operador R depende del parámetro λ y dado que R proporciona una solución para la ecuación (3.74), se le conoce como el resolvente y a $R(x, s; \lambda)$ como el kernel del resolvente. Si sustituimos (3.77) en la última ecuación de (3.75) tenemos que

$$(I - \lambda K)(I + \lambda R)f = f \quad (3.78)$$

$$R - K = \lambda KR$$

Si ahora sustituimos (3.75) en la última ecuación de (3.77)

$$\phi = (I + \lambda R)(I - \lambda K)\phi \quad (3.79)$$

$$R - K = \lambda RK$$

⁶⁸ Burton, T.A. "Volterra Integral and Differential equations. Department of mathematics Southern Illinois University Carbondale, Illinois. Second Edition. El Sevier 2005. pg 167
59

A la ecuación del operador

$$R - K = \lambda KR = \lambda RK \quad (3.80)$$

Se le conoce como la ecuación resolvente. Si el operador R existe con un kernel $R(x, s; \lambda)$ de cuadrado integrable que satisface (3.80) para un valor dado de λ , entonces tal valor λ es un valor regular del kernel $K(x, s)$. Cuando nos referimos al conjunto de todos los valores regulares de K , hablamos del conjunto resolvente Λ . Volviendo al teorema de unicidad, supongamos que existen kernels $R_1(x, s; \lambda)$ y $R_2(x, s; \lambda)$ tal que

$$R_1 - K = \lambda R_1 K = \lambda K R_1 \quad (3.81)$$

$$R_2 - K = \lambda R_2 K = \lambda K R_2$$

al restar la primera ecuación de la segunda y si $\Gamma = R_1 - R_2$ encontramos que

$$\Gamma = \lambda \Gamma K \quad (3.82)$$

multiplicamos por R_1 ambos lados

$$\begin{aligned} R_1 \Gamma &= \lambda R_1 K \Gamma \\ &= (R_1 - K) \Gamma \\ &= R_1 \Gamma - K \Gamma \end{aligned}$$

de la ecuación anterior se deduce que $K \Gamma = 0$ que es cierto si y solo si $\Gamma = 0$, por lo tanto $R_1 = R_2$. El kernel $R(x, s; \lambda)$ es único. Finalizaremos este apartado mostrando que si $f(x)$ es una función de cuadrado integrable y si λ es un valor regular del kernel de cuadrado integrable $K(x, s)$ que posee un el kernel resolvente de cuadrado integrable $R(x, s; \lambda)$, entonces la ecuación integral (3.75) tiene como solución la ecuación (3.77). Si la función $\phi(x)$ se define por la ecuación (3.77) podemos redefinir la ecuación (3.75) como sigue

$$\begin{aligned}
f + \lambda K\phi &= f + \lambda K(f + \lambda Rf) \\
&= f + \lambda Kf + \lambda(\lambda KR)f \\
&= f + \lambda Kf + \lambda(R - K)f & (3.83) \\
&= f + \lambda Rf \\
&= \phi
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi(x)$ es solución de la ecuación integral (3.75). De forma inversa si suponemos que $\phi(x)$ es de cuadrado integrable y que satisface la ecuación (3.75)

$$f = \phi - \lambda K\phi$$

Al sustituir en (3.77) junto con la ecuación resolvente (3.80)

$$\begin{aligned}
f + \lambda Rf &= \phi - \lambda K\phi + \lambda R(\phi - \lambda K\phi) \\
&= \phi + \lambda(R - K - \lambda KR)\phi & (3.84) \\
&= \phi
\end{aligned}$$

Queda demostrada la unicidad de la solución.

3.2 Las ecuaciones integrales (EIV) e integro-diferenciales de Volterra (EIDV)⁶⁹

Empezaremos esta introducción al tema, con una ecuación integral de la forma

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x(s)) ds \quad (3.54)$$

Donde x es un vector en \mathbb{R}^n la función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y la función $g: \pi \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\pi = \{(t, s): 0 \leq s \leq t < \infty\}$. Según Burton⁷⁰ no es usual solicitar que g sea continua. Para mostrar que (3.54) es acotada se requiere que esta sea diferenciable, lo que nos lleva a una ecuación integro-diferencial⁷¹ definida como

⁶⁹ Para este apartado nos apoyamos en Burton, T.A. "Volterra Integral and Differential equations. Department of mathematics Southern Illinois University Carbondale, Illinois. Second Edition. El Sevier 2005. Cap1

⁷⁰ Idem. "Muchos resultados pueden obtenerse con supuestos más débiles"

⁷¹ Aplíquese la diferenciación bajo el signo integral. Ver en Apostol, T.M. "Análisis Matemático". Edit Reverté. 1972. pp 212-213

$$x'(t) = f'(t) + g(t, t, x(t)) + \int_0^t g_1(t, s, x(s)) ds \quad (3.55)$$

Donde g_1 denota $\frac{\partial g}{\partial t}$, lo anterior se puede expresar de forma más general⁷²

$$x'(t) = h(t, x(t)) + \int_0^t F(t, s, x(s)) ds \quad (3.56)$$

Por convención (3.56) se puede escribir como

$$x'(t) = h(t, x) + \int_0^t F(t, s, x(s)) ds \quad (3.57)$$

Es importante hacer notar que si en (3.54) f es diferenciable y si g es independiente de t , la diferenciación en (3.54) [8] produce una ecuación diferencial ordinaria, como la que sigue

$$x'(t) = f'(t) + g(t, t, x(t)) \quad (3.58)$$

ó

$$x'(t) = G(t, x(t)) \quad (3.59)$$

Para regresar de (3.59) a (3.54) simplemente integramos

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t G(s, x(s)) ds \quad (3.60)$$

Por otro lado para revertir el proceso de (3.54) a (3.55) integramos (3.55) y cambiamos el orden de integración

$$\int_0^t x'(s) ds = \int_0^t f'(s) ds + \int_0^t [g(t, t, x(t)) + \int_0^t g_1(t, s, x(s)) ds] ds$$

$$x(t) = f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t g(t, s, x(s)) ds \right] ds$$

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x(s)) ds$$

⁷² Notación para un vector $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y una matriz A $n \times n$. La norma de x será de manera usual

$|x| = \max_i |x_i|$. Mientras que $|A|$, significará que $\sup_{|x| \leq 1} |Ax|$

Un procedimiento para estudiar (3.54) es analizar los resultados estándar para (3.59) y entonces desarrollar paralelamente resultados para (3.54) o para (3.56)⁷³.

3.2.1) Relaciones entre ecuaciones integrales y diferenciales

Muchas ecuaciones diferenciales se pueden expresar como ecuaciones integrales, sin embargo lo contrario es falso. Una ecuación de n -ésimo orden

$$x^n(t) = f(t, x, x', \dots, x^{n-1}) \quad (3.61)$$

Se puede expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden y después integrar. Como ejemplo, si $x''(t) = f(t, x, x')$, tenemos que $x = x_1$ y $x' = x_1' = x_2$, entonces $x''(t) = x_2' = f(t, x_1, x_2)$, por lo que el sistema de dos ecuaciones de primer orden será

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(t, x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

En general si, $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$x'(t) = G(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.63)$$

es un sistema de n ecuaciones de primer orden con condiciones iniciales (llamado problema de valor inicial) y expresado como

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t G(s, x(s)) ds \quad (3.64)$$

es un sistema de n ecuaciones integrales. Para efectos de resolver el sistema no es relevante como se exprese: como ecuaciones integrales o diferenciales. Es cuestión mas bien de renombrar variables. Por otro lado si $n \in \mathbb{Z}^+$, $f \in C^{n+1}$ en $[t_0, T)$ y g es continua, tenemos que por ejemplo

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^t (t-s)^n g(s, x(s)) ds \quad (3.65)$$

representa una ecuación diferencial de $n+1$ orden. Por ejemplo si $n = 2$, entonces

⁷³ Burton, T.A. "Volterra Integral and Differential equations. Department of mathematics Southern Illinois University Carbondale, Illinois. Second Edition. El Sevier 2005. pp. 6

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^t (t-s)^2 g(s, x(s)) ds$$

$$x'(t) = f'(t) + \int_{t_0}^t 2(t-s)g(s, x(s)) ds$$

$$x''(t) = f''(t) + \int_{t_0}^t 2g(s, x(s)) ds$$

Al derivar una vez más

$$x'''(t) = f'''(t) + 2g(t, x(t))$$

Esta última resulta ser una ecuación diferencial de tercer orden. Notar que

$$x(t_0) = f(t_0), x'(t_0) = f'(t_0) \text{ y } x''(t_0) = f''(t_0)$$

por lo que (3.65) representa un problema de valor inicial y si g es localmente Lipschitz en x , se esperaría una solución única. Como se ha mencionado más arriba, (3.65) representa un problema de valor inicial de orden $n+1$, sin embargo esta no es la única forma posible para este problema. Un ejemplo aclara lo anterior. Sea

$$x(t) = 1 + \int_0^t [-4 + e^{-(t-s)}] x(s) ds \quad (a)$$

Al diferenciar encontramos una ecuación diferencial de primer orden (EDPO)

$$x'(t) = -3x(t) - \int_0^t e^{-(t-s)} x(s) ds \quad (b)$$

Si multiplicamos por e^t

$$x'e^t = -3xe^t - e^t \int_0^t e^{-(t-s)} x(s) ds$$

$$x'e^t = -3xe^t - \int_0^t e^s x(s) ds$$

Al diferenciar nuevamente

$$x''e^t + x'e^t = -3xe^t - 3x'e^t - xe^t$$

$$x''e^t = -4xe^t - 4x'e^t$$

por lo que

$$x''+4x'+4x=0 \quad (c)$$

que posee como solución general

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \quad (d)$$

de esta manera [d] satisface [a] con dos soluciones linealmente independientes. Calculamos

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} - 2C_2 t e^{-2t} \\ x(0) &= -2C_1 + C_2 \end{aligned} \quad (d')$$

Si en (b) $x'(0) = -3x(0)$ que al combinarse con (d)

$$\begin{aligned} x' &= -3 \left[C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \right] - \int_0^t e^{-(t-s)} \left[C_1 e^{-2s} + C_2 t e^{-2s} \right] ds \\ x'(0) &= -3x(0) = -3C_1 \end{aligned}$$

entonces usando el resultado en (d')

$$\begin{aligned} -2C_1 + C_2 &= -3C_1 \\ C_2 &= -C_1 \end{aligned}$$

por lo anterior

$$x(t) = C_1 e^{-2t} - C_1 t e^{-2t} \quad (e)$$

es la solución de (b) y como C_1 es arbitraria, (b) únicamente una solución lineal independiente. Para terminar, tenemos que (a)

$$x(0) = 1 + 0 = 1$$

Que si se aplica a [e] encontramos que $C_1 = 1$. Finalmente

$$x(t) = e^{-2t} - t e^{-2t}$$

que es la solución única de (a).

Ahora vamos a considerar el problema inverso para ecuaciones lineales, específicamente el caso cuando $n = 2$. Sean $a(t)$, $b(t)$ y $f(t)$ continuas en el intervalo $[0, T)$ y

$$\begin{aligned} x'' + a(t)x' + b(t)x &= f(t) \\ x(0) = x_0 \quad x'(0) &= x_1 \end{aligned} \quad (3.66)$$

La transformación de Liouville⁷⁴ transformará (3.66) en

$$\begin{aligned} u'' &= -c(t)u + h(t) \\ u(0) &= u_0 \quad u'(0) = u_1 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Con $c(t)$ y $h(t)$ continuas, si integramos (3.67) en el intervalo $[0, t]$, dos veces; obtenemos primeramente

$$u' = u_1 - \int_0^t c(s)u(s)ds + \int_0^t h(s)ds$$

Un segundo proceso de integración nos lleva a

$$u(t) = u_0 + u_1 t - \int_0^t \int_0^v c(s)u(s)dsdv + \int_0^t \int_0^v h(s)dsdv$$

por otro lado, considerar que la integral

$$J = \int_0^t \int_0^v c(s)u(s)dsdv$$

es calculada sobre la región delimitada por el triángulo (ver gráfico 5)

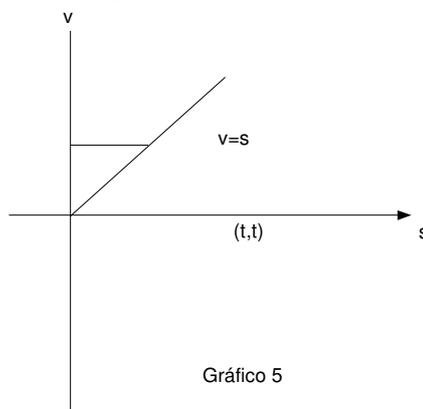


Gráfico 5

⁷⁴ Logan, J. David, Applied Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York 1998. El ejercicio 1 página 30 dice: Mostrar que la ODE $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ puede ser transformada en una ecuación tipo Schrödinger $u'' + r(x)u = 0$ con $r = q - p'/2 - p^2/4$ sin ninguna derivada primera por medio de la transformación de

Liouville $u = \exp(\frac{1}{2} \int_a^x p(\xi)d\xi)$. La solución es como sigue: se calcula u''

$u'' = \left(\exp(\frac{1}{2} \int_a^x p(\xi)d\xi) \right) \left[y'' + p(x)y' + y(\frac{1}{2} p' + \frac{1}{4} p^2) \right]$. Al restar $u(\frac{1}{2} p' + \frac{1}{4} p^2)$, y sumar $uq(x)$ e igualar a

cero tenemos: $u'' - u(\frac{1}{2} p' + \frac{1}{4} p^2) + uq(x) = 0$, reordenando encontramos $u'' + r(x)u = 0$.

Al intercambiar el orden de integración

$$J = \int_0^t \int_s^t c(s)u(s)dvds = \int_0^t (t-s)c(s)u(s)ds$$

y además si $H(t) = \int_0^t \int_0^v h(s)dsdv$ finalmente tenemos que

$$u(t) = u_0 + u_1 t - H(t) - \int_0^t (t-s)c(s)u(s)ds \quad (3.68)$$

El proceso anterior también nos permite pasar de una ecuación integro diferencial como

$$x'(t) = h(t, x(t)) + \int_0^t F(t, s, x(s))ds \quad (3.69)$$

a una como $x(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x(s))ds$ por integrar en $[0, t)$ e intercambiar el orden de integración y así obtener

$$x(t) = x(0) + \int_0^t [h(s, x(s)) + \int_s^t F(u, s, x(s))du]ds \quad (3.70)$$

bajo condiciones adecuadas de continuidad.

Considérese ahora el problema de transformar una ecuación diferencial escalar lineal general en una ecuación integral. Vemos que $f(t)$ y $a_1(t), \dots, a_n(t)$ son continuas sobre $[0, T)$ (cierto intervalo) en

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad (3.71)$$

Con $x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ condiciones iniciales dadas, y el conjunto,

$x^{(n)}(t) = z(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} x^{(n-1)}(t) &= x^{(n-1)}(0) + \int_0^t z(s)ds \\ x^{(n-2)}(t) &= x^{(n-2)}(0) + tx^{(n-1)}(0) + \int_0^t (t-s)z(s)ds \\ x^{(n-3)}(t) &= x^{(n-3)}(0) + tx^{(n-2)}(0) + \frac{t^2}{2!}x^{(n-1)}(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}z(s)ds \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x(t) &= x(0) + tx'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x^{(n-1)}(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^{(n-1)}}{(n-1)!}z(s)ds \end{aligned} \quad (3.72)$$

al sustituir $x(t)$ y sus derivadas en (3.71) obtenemos una ecuación integral escalar para $z(t)$. Sin embargo no todas las ecuaciones integrables son reducibles a una ecuación diferencial, por ejemplo sea $f(t)$ continua y diferenciable y sea

$$x(t) = f(t) + \int_0^t [\text{Sin}(t-s)]x(s)ds \quad (3.73)$$

Al diferenciar obtenemos⁷⁵

$$x'(t) = f'(t) + \int_0^t [\text{Cos}(t-s)]x(s)ds + \text{Sin}(t-t)x(t) - \text{Sin}(t-0)x(0)(0)$$

$$x'(t) = f'(t) + \int_0^t [\text{Cos}(t-s)]x(s)ds$$

al hacerlo una vez más

$$x''(t) = f''(t) + \int_0^t [\text{Sin}(s-t)]x(s)ds + \text{Cos}(t-t)x(t) - \text{Cos}(t)x(0)(0)$$

$$x''(t) = f''(t) + x(t) + \int_0^t [\text{Sin}(s-t)]x(s)ds$$

Como puede observarse no se puede reducir a una ecuación diferencial ordinaria. Podemos decir que muchas ecuaciones integrales no son reducibles a una ecuación diferencial ordinaria debido a que la integral construye una *memoria* no presente en la ecuación diferencial⁷⁶.

3.2.2) Algunas Conexiones entre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y las EIV

Buscamos ahora entender la conexión entre las EDO y las ecuaciones de Volterra (EV). Conociendo algunas propiedades de las EDO estamos en posibilidad de entender un poco acerca de las propiedades de las EV. El siguiente ejemplo ilustra ahora la situación en donde una ecuación integral escalar es reducible a una EDO. Sea

$$x' = Ax + \int_0^t B e^{-(t-s)} x(s) ds \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (3.74)$$

Integramos (3.74)

⁷⁵ Apostol, T.M. "Análisis Matemático". Edit Reverté.1972. pp 212-213

⁷⁶ Un aspecto importante del enfoque presentado por Burton 2005 es el que señala que aunque una ecuación diferencial de primer orden puede ser considerada elemental, cada una de ellas se refiere a una ecuación escalar integral (lo contrario no siempre es cierto)

$$\begin{aligned}
x' &= Ax + \int_0^t B e^{-(t-s)} x(s) ds \\
x &= A \int_0^t x(s) ds + x(0) + \int_0^t B \int_0^v e^{-(t-s)} x(s) ds dv \\
x &= x(0) + A \int_0^t x(s) ds + \int_0^t B \int_s^t e^{-(t-s)} x(s) dv ds \\
x &= x(0) + \int_0^t \left[Ax(s) + B \int_s^t e^{-(t-s)} x(s) dv \right] ds \\
x &= x(0) + \int_0^t \left[A + B \int_s^t e^{-(t-s)} dv \right] x(s) ds
\end{aligned}$$

Ahora, si $C(t-s) = A + B \int_s^t e^{-(t-s)} dv$ tenemos que

$$x = x(0) + \int_s^t C(t-s)x(s) ds \quad (3.74')$$

De otra manera si en (3.74) multiplicamos por e^t y diferenciamos

$$\begin{aligned}
x'e^t &= Axe^t + B \int_0^t e^s x(s) ds \\
x''e^t + x'e^t &= Ax'e^t + Axe^t + Be^t x \\
x''e^t + [1-A]x'e^t + [-A-B]xe^t &= 0
\end{aligned}$$

finalmente

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 0 \quad (3.74')$$

Como otro ejemplo vamos a resolver la ecuación diferencial

$$x' = A(t)x + B(t) \quad (3.75)$$

esto es, vamos a encontrar la solución general de una ecuación diferencial de primer orden lineal. De acuerdo al método de variación de parámetros⁷⁷

⁷⁷ Recordar que una ecuación diferencial de la forma $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ tiene como solución

$$y(x) = c \text{Exp} \left[-\int p(x) dx \right] + \text{Exp} \left[-\int p(x) dx \right] \int \left[\text{Exp} \left[\int p(x) dx \right] \right] f(x) dx$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \text{Exp} \left[- \int_{t_0}^t A(s) ds \right] \right] = B(t) \text{Exp} \left[- \int_{t_0}^t A(s) ds \right]$$

$$x \text{Exp} \left[- \int_{t_0}^t A(s) ds \right] = \int_{t_0}^t \left[\text{Exp} \left[- \int_{t_0}^s A(u) du \right] \right] B(s) ds + c \quad (3.76)$$

$$x = \text{Exp} \left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right] \left\{ \int_{t_0}^t \left[\text{Exp} \left[- \int_{t_0}^s A(u) du \right] \right] B(s) ds \right\} + c \text{Exp} \left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right]$$

$$x = \int_{t_0}^t \left[\text{Exp} \left[\int_s^t A(u) du \right] \right] B(s) ds + c \text{Exp} \left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right]$$

si $x(t_0) = c$

$$x = \int_{t_0}^t \left[\text{Exp} \left[\int_s^t A(u) du \right] \right] B(s) ds + x(t_0) \text{Exp} \left[\int_{t_0}^t A(s) ds \right] \quad (3.77)$$

por ejemplo, si A es una constante y $t_0 = 0$

$$Z(t) = \text{Exp}[At] \quad Z(t-s) = \text{Exp}[A(t-s)] \quad (3.78)$$

finalmente

$$x(t) = Z(t)x(0) + \int_0^t Z(t-s)B(s)ds \quad (3.79)$$

donde $Z(t)$ es la solución al sistema $x' = Ax$, $x(0) = 1$. El resultado en (3.79) puede verse como un intento de generalizar (3.74). Consideremos ahora la ecuación escalar

$$x'(t) = -Ax(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds + f(t) \quad (3.80)$$

con A constante, C continua para $0 \leq s \leq t < \infty$ y f continua en $0 \leq t < \infty$.

Proposición 3.2.2.1 Sea $A > 0$, $|f(t)| \leq M$ y $\int |C(t,s)| ds \leq mA$ en el intervalo $0 \leq t < \infty$ donde $0 \leq m < 1$ y $M > 0$, todas las soluciones de (3.80) son acotadas⁷⁸.

En general en caso de que A se incremente y C disminuya la estabilidad se incrementa. Para ilustrar lo anterior, supóngase que A es constante y $C(t-s)$ el kernel, entonces para la ecuación integro diferencial

⁷⁸ Ver demostración en la siguiente sección.

$$x'(t) = -Ax(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds \quad (3.81)$$

todas las soluciones son acotadas. Si $x(t)$ es solución y $r \in \mathbb{R}^+$, entonces $x(t) = e^{rt}y$ y define una función y tal que esta tiende a cero tan rápido como lo hace e^{-rt} . De acuerdo a lo anterior al derivar $x(t)$ con respecto a t tenemos

$$x'(t) = re^{rt}y + e^{rt}y'$$

al sustituir $x(t) = e^{rt}y$ en (3.81)

$$\begin{aligned} x'(t) &= -Ae^{rt}y + \int_0^t C(t-s)e^{rs}y(s)ds \\ re^{rt}y + e^{rt}y' &= -Ae^{rt}y + \int_0^t C(t-s)e^{rs}y(s)ds \\ e^{rt}y' &= -[A+r]e^{rt}y + \int_0^t C(t-s)e^{rs}y(s)ds \end{aligned}$$

volviendo a $x(t) = e^{rt}y$, dado que $\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} = 0$ y es acotada. Ahora

$$y' = -[A+r]y + \int_0^t C(t-s)e^{-r(t-s)}y(s)ds$$

donde $A \rightarrow [A+r]$ y $C(t-s) \rightarrow C(t-s)e^{-r(t-s)}$ lo cual cumple con **3.2.2.1**.

Proposición 3.2.2.2 Sea f una función vectorial en $[0, \infty)$ con $|f(t)| \leq M$, y supóngase que $D(t, s)$ es una matriz $n \times n$ continua en $0 \leq s \leq t < \infty$. Para $m < 1$ y $\int_0^t |d(t, s)| ds \leq m$ en $0 \leq t < \infty$ todas las soluciones de

$$x(t) = f(t) + \int_0^t D(t, s)x(s)ds \quad (3.82)$$

son acotadas.

Proposición 3.2.2.3 Sean $C(t)$ y $f(t)$ funciones escalares en $0 \leq t < \infty$ y supóngase que existen A, B y α constantes con

$$|f(t)| \leq Ae^{-\alpha t} \text{ y } |C(t)| \leq Be^{-\alpha t}$$

si $\alpha - B = \beta > 0$ y si $x(t)$ es cualquier solución de

$$x(t) = f(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds \quad (3.83)$$

Entonces $|x(t)| \leq Ae^{-\beta t}$ por lo tanto todas las soluciones de (3.83) son acotadas

Demostración

Sea $|x(t)| \leq Ae^{-\alpha t} + \int_0^t Be^{-\alpha(t-s)} |x(s)| ds$ al multiplicar por $e^{\alpha t}$

$$e^{\alpha t} |x(t)| \leq A + \int_0^t Be^{\alpha s} |x(s)| ds$$

y por la desigualdad de Gronwall

$$e^{\alpha t} |x(t)| \leq Ae^{\int_0^t B ds}$$

$$e^{\alpha t} |x(t)| \leq Ae^{Bt}$$

$$|x(t)| \leq Ae^{t(B-\alpha)} = Ae^{-\beta t}$$

Finalmente

$$|x(t)| \leq Ae^{-\beta t} \tag{3.83}$$

Para finalizar esta sección, mostraremos algunas propiedades de las ecuaciones de Volterra. Específicamente usaremos una ecuación escalar de tipo convolución para tal propósito. Sea la ecuación

$$x(t) = f(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds \tag{3.84}$$

en donde $C^{(n)}(t)$ y $f^{(n)}(t)$ son continuas en $[0, \infty)$.

Proposición 3.2.2.4 Si $C(t)$ satisface una ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes, entonces (3.84) [38] puede ser reducida a una ecuación diferencial de n-ésimo orden con coeficientes constantes.

De acuerdo a lo anterior, las propiedades de estabilidad de (3.84) se determinan por la localización de ceros de un polinomio. Aunque no es posible encontrar las raíces en el caso general, el criterio de Routh-Hurwitz permite decidir si estas caen en el semiplano izquierdo.

Teorema 3.2.2.1. Todas las raíces características de un polinomio real

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (3.85)$$

tienen parte real negativa si y solo si $D_k > 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ donde $D_1 = a_1$ $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-5} \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-6} \\ & 0 & 0 & & & & \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & a_k \end{vmatrix} \text{ con } a_j = 0 \text{ para } j > n$$

de lo anterior se sigue que a_1 y a_2 deben ser ambos positivos en orden de que

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0 \quad (3.86)$$

satisfaga el criterio⁷⁹.

Para el caso de $n = 3$ las raíces características de

$$\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 = 0 \quad (3.87)$$

tendrán todas parte real negativa si $D_1 > 0$, $D_2 = a_1a_2 - a_3 > 0$ y si

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - (a_3)^2 > 0$$

dado que $D_1 = a_1 > 0$, $D_3 > 0$ entonces a_2 y a_3 deben ser ambos positivos. De no ser así nos enfrentaríamos una contradicción. Si $a_3 < 0$, al dividir D_3 por a_3 , $a_1a_2 - a_3 < 0$. Por lo tanto diremos en conclusión que las raíces características de (3.87) tienen parte real negativa si y solo si $a_i > 0$, para $i=1,2,3$ y $a_1a_2 > a_3$.

⁷⁹ Si $D_1 = a_1$ $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0$, $a_2 > 0$

Para mostrar lo expuesto en **3.2.2.4**, supóngase que $C(t)$ satisface la ecuación diferencial lineal ordinaria homogénea

$$C''(t) + C(t) = 0 \quad (3.88)$$

Si diferenciamos (3.84) dos veces

$$x'(t) = f'(t) + C(0)x(t) + \int_0^t C'(t-s)x(s)ds$$

$$x''(t) = f''(t) + C(0)x'(t) + C'(0)x(t) + \int_0^t C''(t-s)x(s)ds$$

Si sumamos esta última ecuación a (3.84)

$$x(t) + x''(t) = f(t) + f''(t) + C(0)x'(t) + C'(0)x(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds + \int_0^t C''(t-s)x(s)ds \quad (3.89)$$

para continuar sustituimos (3.88) en (3.89)

$$x(t) + x''(t) = f(t) + f''(t) + C(0)x'(t) + C'(0)x(t) - \int_0^t C''(t-s)x(s)ds + \int_0^t C''(t-s)x(s)ds$$

$$x(t) + x''(t) = f(t) + f''(t) + C(0)x'(t) + C'(0)x(t) \quad (3.90)$$

reordenando

$$x''(t) - C(0)x'(t) + [1 - C'(0)]x(t) = f(t) + f''(t) \quad (3.91)$$

La ecuación (3.91) tiene ecuación homogénea asociada

$$x''(t) - C(0)x'(t) + [1 - C'(0)]x(t) = 0 \quad (3.92)$$

Asumiendo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones linealmente independientes (L.I.) de (3.92) y que $x_p(t)$ es una solución particular de (3.91), entonces podemos expresar la solución de (3.84) en el intervalo $[0, \infty)$ como

$$x(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t) + x_p(t) \quad (3.93)$$

3.2.3) Soluciones y comportamiento de las soluciones de una EIDV

La solución de una ecuación integral e integro diferencial de Volterra como lo expusimos en la sección anterior tiene conexión con las EDO. La solución de una EDO lleva a una ecuación de Volterra. Tal fue nuestra propuesta siguiendo a T. A. Burton al inicio de esta sección. Cerramos esta sección con la dicotomía EDO-EIDV, que engloba lo visto en el capítulo III. Primero, revisamos la solución de una EDO (i), y en seguida con los elementos para el análisis de

estabilidad de soluciones de las EDO. En una segunda parte nos ocuparemos de los elementos para el análisis de estabilidad de soluciones de las EIDV (ii).

Solución de una EDO

Encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (3.94)$$

con coeficientes continuos $a_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ y condiciones iniciales

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \quad (3.95)$$

es equivalente a solucionar determinada ecuación de Volterra. Lo anterior puede demostrarse para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x) \quad (3.96)$$

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1 \quad (3.97)$$

Supongase que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \phi(x) \quad (3.98)$$

Integrando sucesivamente y de acuerdo a la ecuación (3.97) encontramos

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \phi(t) dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t) \phi(t) dt + C_1 x + C_0 \quad (3.99)$$

La fórmula de integración sucesiva es

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz$$

Al sustituir (3.98) y (3.99) en (3.96) obtenemos

$$\phi(x) + \int_0^x a_1(x) \phi(t) dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x) (x-t) \phi(t) dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x)$$

reordenando

$$\phi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\phi(t)dt = F(x) - C_1a_1(x) - [C_0 + C_1x]a_2(x) \quad (3.100)$$

Si ahora

$$K(x-t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \quad (3.101)$$

$$f(x) = F(x) - C_1a_1(x) - [C_0 + C_1x]a_2(x) \quad (3.102)$$

por lo que la ecuación (3.100) se toma la forma de

$$\phi(x) = \int_0^x K(x-t)\phi(t)dt + f(x) \quad (3.103)$$

esto es, una ecuación integral de Volterra de segunda clase de tipo convolución. La existencia de una solución única para la ecuación diferencial (3.96) que satisface las condiciones iniciales dadas por (3.97) se obtiene de resolver la ecuación integral (3.103) con K y f determinadas por las ecuaciones (3.101) y (3.102) seguido de sustituir la expresión final de $\phi(x)$ en y de la ecuación (3.99).

De manera recíproca, la existencia de un solución única para la ecuación (3.103) viene de la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy (3.96) - (3.97), para la ecuación diferencial lineal de coeficientes continuos.

Elementos para el análisis de estabilidad de soluciones de las EDO

No solo es importante conocer la solución específica del problema de Cauchy sino además el comportamiento de la solución al variar las condiciones iniciales y al variar el argumento. Atenderemos esto de acuerdo a la *teoría de la estabilidad*⁸⁰ de una solución. Las demostraciones se remiten al apéndice o a la bibliografía.

Supóngase el sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales que modela cierto fenómeno

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.104)$$

$$y_i(t_0) = y_{i0} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Las condiciones iniciales son resultado de mediciones de lo cual se puede alegar cierto grado de precisión. Si los valores iniciales sufrieran pequeños cambios y estos a su vez llevaran a modificar de manera importante la solución, tal sistema debe desecharse puesto que no describe

⁸⁰ En este caso nos limitaremos a lo expuesto en Bugrov, Ya. S. y Nikolsky S.M. (1985). Matemáticas Superiores. Editorial Mir. Moscú. Para las demostraciones a los teoremas 1 y 2 consultar la obra citada. Daremos algún detalle sobre el tema en el apéndice correspondiente.

él fenómeno en cuestión. Resalta entonces el hecho de conocer aquellas condiciones iniciales en las que pequeños cambios en los valores iniciales, conllevan a una mínima variación en la solución del sistema. En tal situación apelamos al *teorema de existencia y unicidad*.

Teorema 3.2.3.1. (dependencia continua de la solución de las condiciones iniciales)

Si el segundo miembro de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (3.105)$$

es continuo también respecto a la variable y y tiene la derivada parcial acotada $|f_y| \leq N$ en un rectángulo $D = \{t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, entonces la solución de la ecuación (3.105) $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ que satisface la condición inicial $y(t_0) = y_0$, depende continuamente de los datos iniciales. De forma más exacta significa que, para todo valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$, entonces

$$|y(t, t_0, y_0) - y(t, t_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon \quad (3.106)$$

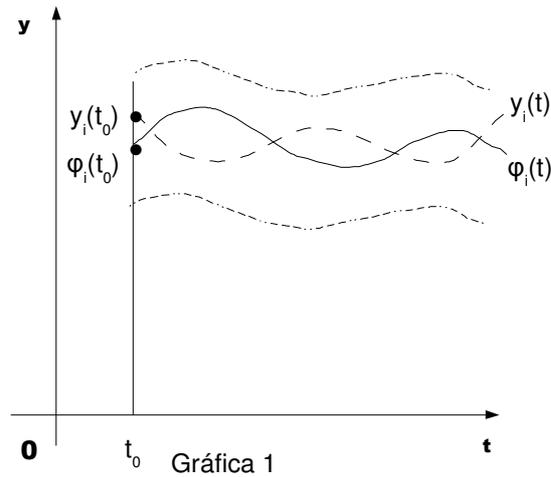
cuando

$$|t_0 - t| < T, T < T_0, T_0 = \min\left\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\right\}$$

$$M = \max_{(t, y) \in D} |f(t, y)|$$

Donde si se cumplen las condiciones establecidas en el teorema se habla de que el *problema ha sido planteado correctamente*. Esto sería el caso de la estabilidad de la solución para un intervalo pequeño para t . Si ahora el argumento $t \in [t_0, \infty)$ toca a la *teoría de la estabilidad* decir si la solución depende o no de los valores iniciales. Antes de pasar al teorema 2 revisemos la siguiente definición.

Definición.- Supóngase que $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ es la solución del sistema (3.104). La solución $\varphi(t)$ del sistema (3.104) se llama *estable según Liapunov*



si para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para una solución cualquiera $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ de este sistema, cuyas condiciones iniciales satisfacen las desigualdades

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.107)$$

sean válidas las desigualdades

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n) \quad \forall t \in [t_0, \infty) \quad (3.108)$$

Decimos que la solución $\varphi(t)$ es estable según Liapunov si las soluciones próximas a ella de acuerdo a las condiciones iniciales permanecen próximas también para los valores $t \geq t_0$ (Gráfica 3.1). Pero si además de estabilidad según Liapunov se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.109)$$

La solución se dice ser *estable asintóticamente*. Sin embargo de (3.109) no se deriva la estabilidad según Liapunov.

La investigación de la estabilidad según Liapunov de la solución arbitraria $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ del sistema (3.104) puede reducirse al análisis de estabilidad de la solución trivial ($x_i(t) \equiv 0$) de otro sistema. De acuerdo a (3.109) redefinimos el sistema (3.104) de la siguiente manera

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.110)$$

de lo anterior es fácil deducir que

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt}$$

De esta manera el sistema (3.104) se define como

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1 + \varphi_1(t), \dots, x_n + \varphi_n(t)] - f_i[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.111)$$

Así, el sistema (3.110) tiene la solución trivial

$$x_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.112)$$

Lo anterior se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3.2.

La solución $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ del sistema (3.104) es estable según Liapunov (es estable asintóticamente) si y solo si es estable según Liapunov (es estable asintóticamente) la solución trivial (punto de reposo) del sistema (3.110).

Dicha solución tiene la propiedad de que el punto $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ es invariante al cambiar t , esto es, queda en el lugar. En tal caso la solución (3.111) y el punto $(0, \dots, 0)$ se conocen como punto de reposo.

Las condiciones de estabilidad, en lo que se refiere al punto de reposo $x_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, n)$ consisten en lo siguiente: el punto de reposo $x_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, n)$ del sistema (3.110) es estable según Liapunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que de la desigualdad

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, \dots, n)$$

resulta en

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n), \forall t \geq t_0$$

En otras palabras, una trayectoria, cuyo punto inicial se encuentra en cierto δ -entorno del origen de coordenadas, para $t \geq t_0$ no queda fuera de los límites de un ε -entorno arbitrario del origen de coordenadas. En particular nos referimos a entornos rectangulares, sin embargo se puede pasara a los esféricos, lo cual facilita el trabajo con la forma vectorial de notación de la solución $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$:

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

Elementos para el análisis de estabilidad de soluciones de las EIDV

Empezaremos el análisis de la estabilidad para una EIDV de tipo convolución, con el siguiente sistema

$$x = Ax + \int_0^t C(t,s)x(s)ds \quad (3.113)$$

en el cual A es una matriz $n \times n$ cuyas raíces características poseen parte negativa real y $C(t,s)$ una matriz $n \times n$ de funciones continuas para $0 \leq s \leq t < \infty$. Las soluciones al sistema anterior son acotadas, esto es

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

dicho de otra manera, x es $L^1[0, \infty)$ bajo condiciones menos restrictivas que las requeridas para la estabilidad asintótica uniforme. Pero para el caso de convolución

$$x' = Ax + \int_0^t D(t-s)x(s)ds \quad (3.114)$$

con $D(t)$ continua en $[0, \infty)$ y A una matriz constante $n \times n$, entonces

$$\int_0^{\infty} |D(t)| dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.115)$$

es equivalente a la estabilidad asintótica uniforme (EAU) de (3.114). Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3.3. Si cada solución $x(t)$ de (3.114) en el intervalo $[0, \infty)$ es $L^1[0, \infty)$, si $D(t)$ es $L^1[0, \infty)$, y si A es una matriz constante $n \times n$, entonces la solución cero de (3.114) es uniformemente asintóticamente estable.

Prueba

Si $Z'(t) = AZ(t) + \int_0^t D(t-s)Z(s)ds$, entonces $Z(t)$ es $L^1[0, \infty)$.

Supóngase que si $\phi: [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función inicial continua y $\phi(t) \equiv x(t_0)$, entonces $x(t, \phi)$ denotará la solución en $[t_0, \infty)$. De manera equivalente se puede referir a dicha solución como $x(t, t_0, \phi)$. La solución $x(t) \equiv 0$ es la solución cero.

Sea $x(t, t_0, \phi)$ la solución de (3.114) en $[t_0, \infty)$. Al sustituir

$$x'(t, t_0, \phi) = Ax(t, t_0, \phi) + \int_0^{t_0} D(t-s)\phi(s)ds + \int_{t_0}^t D(t-s)x(s, t_0, \phi)ds$$

$$x'(t+t_0, t_0, \phi) = Ax(t+t_0, t_0, \phi) + \int_0^{t_0} D(t+t_0-s)\phi(s)ds + \int_0^t D(t-s)x(t_0+s, t_0, \phi)ds$$

Ya que la integral de convolución debe iniciar en cero. Es claro que si $t_0 = 0$ regresamos a la ecuación (3.114). Lo anterior también puede expresarse de la siguiente manera. Sea $x(t+t_0, t_0, \phi)$ la solución de la ecuación integro-diferencial

$$x' = Ax + \int_0^{t_0} D(t+t_0-s)\phi(s)ds + \int_0^t D(t-s)x(s)ds \quad (3.116)$$

Si ahora $y=x(t, t_0, \phi)$ con condiciones iniciales $y(0)=x(t_0, t_0, \phi) = \phi(t_0)$ y además

$$F(t) = \int_0^{t_0} D(t+t_0-s)\phi(s)ds \quad (3.117)$$

Reescribiendo la ecuación escribimos

$$y' = Ay + \int_0^t D(t-s)y(s)ds + F(t)$$

y al resolver por variación de parámetros de la misma manera que lo hicimos para (3.75)

$$y(t) = Z(t)\phi(t_0) + \int_0^t Z(t-s)F(s)ds$$

Si sustituimos $y=x(t+t_0, t_0, \phi)$

$$x(t+t_0, t_0, \phi) = Z(t)\phi(t_0) + \int_0^t Z(t-s) \left\{ \int_0^{t_0} D(s+t_0-u)\phi(u)du \right\} ds \quad (3.118)$$

$$x(t+t_0, t_0, \phi) = Z(t)\phi(t_0) + \int_0^t Z(t-s) \left\{ \int_0^{t_0} D(s+u)\phi(t_0-u)du \right\} ds$$

Para poder concluir acerca de la estabilidad de las soluciones de una EIDV, debemos enunciar algunas propiedades en $L^1[0, \infty)$.

Definición de $L^1[0, \infty)$

El espacio $L^1[0, \infty)$ es un espacio normado, esto es,

$$L^1[0, \infty) = \{f \mid f \text{ es medible y } |f| \text{ es integrable}\}$$

con norma $\|f\|_1 = \int_0^{\infty} |f(x)| dx$. Si f es medible y $|f|$ es integrable, entonces converge.

Convergencia en L^p

Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una secuencia la cual converge en L^p a f ($1 \leq p < \infty$). Si $f_n \in L^p$ y $f \in L^p$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p^p = 0$$

Los más importantes casos de convergencia son cuando $p = 1, 2$. Si $p = 1$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$$

con $f_n \in L^1$ y $f \in L^1$. De manera alternativa la convergencia en L^1 se escribe $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Proposición 3.2.3.1. Para todo $f \in L^1[0, \infty)$ y $g \in L^1[0, \infty)$, el producto $fg \in L^1[0, \infty)$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

De la definición de $L^1[0, \infty)$ y de la desigualdad de Hölder

$$\int_0^{\infty} |fg| dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

por lo que para todo $f \in L^1[0, \infty)$ y $g \in L^1[0, \infty)$ se tiene

$$(f, g) = \int_0^{\infty} f(x)g(x) dx$$

Que es el producto interno definido en $L^1[0, \infty)$. Si una de las funciones se anula en casi todas partes, (f, g) es nula en así todas partes. La desigualdad de Hölder se cumple en forma trivial.

Teorema 3.2.3.4. (De convergencia dominada de Lebesgue⁸¹)

Sea (X, B, m) un espacio medible y sea $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una función medible en X . Por otro lado sea $s(x)$ un función medible e integrable no negativa, que se dice domina a $f(x)$ siempre que $|f(x)| \leq s(x)$ para casi cualquier x en X . La función $s(x)$ será dicha a dominar la secuencia $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ con tal que esta domine cada $f_n(x)$ en la secuencia. De esta manera si la secuencia $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones medibles de variable real en X es dominada por una función integrable, entonces

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)$$

$$\int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)$$

Por lo tanto, si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe para casi cualquier x en X , entonces

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)$$

Podemos ahora concluir respecto al **Teorema 3.2.3.3.** Sea A una matriz constante $n \times n$ y $Z(t)$ es $L^1[0, \infty)$, entonces $AZ(t)$ es $L^1[0, \infty)$. De manera similar si f y $g \in L^1[0, \infty)$, la convolución⁸²

$$\int_0^\infty f(t-s)g(s)ds \in L^1[0, \infty)$$

Por lo que $\int_0^t D(t-s)Z(s)ds \in L^1[0, \infty)$ y en consecuencia $Z'(t) \in L^1[0, \infty)$.

Como $Z'(t) \in L^1[0, \infty)$ la función $Z(t) \in L^1[0, \infty)$. El **Teorema de convergencia dominada de Lebesgue** (TCD) requiere que $Z(t)$ que está acotada en $L^1[0, \infty)$ por funciones integrables fijas. Es claro que $Z(t)$ en $L^1[0, \infty)$ está acotada únicamente por cero (Ver **Teorema 3.2.3.5.** caso b). De esta manera la integral de convolución de una función en $L^1[0, \infty)$ con una función que tiende a cero como $t \rightarrow \infty$ es una función que tiende a cero como $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto

⁸¹ Goodner Dwight B. A converse to Lebesgue dominated convergence theorem. Florida State University. 1965

⁸² La desigualdad de Hölder para la integral de convolución. Ver Teorema de Fubini

$$Z'(t) = AZ(t) + \int_0^t D(t-s)Z(s)ds \rightarrow 0$$

como $t \rightarrow \infty$.

Volviendo a (3.118), por TCD $Z(t)\phi(t_0) \rightarrow 0$ independiente de t_0 . Para el segundo término de (3.118),

$$\int_0^t Z(t-s) \left\{ \int_0^{t_0} D(s+u)\phi(t_0-u)du \right\} ds \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$ (**Teorema 3.2.3.4.** y la desigualdad de Hölder). Si asumimos que para $\eta > 0$ y $\varepsilon > 0$, existe un $T > 0$, tal que si $t_0 \geq 0$ y $|\phi(t)| < \eta$ cuando $\phi(t) \in [0, t_0]$, para $t - t_0 \geq T$ entonces $x(t+t_0, t_0, \phi) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$ independientemente de t_0 . Decimos que la solución cero presenta estabilidad asintótica uniforme. Lo cual completa la prueba.

El siguiente teorema⁸³ presenta un conjunto de argumentos equivalentes para la versión escalar de una EIDV.

Teorema 3.2.3.5. Sea $A > 0$, $D : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ continua, $\int_0^\infty D(t)dt < \infty$, $-A + \int_0^\infty D(t)dt \neq 0$ y

$$x'(t) = -Ax(t) + \int_0^t D(t-s)x(s)ds \quad t \geq 0 \quad (3.119)$$

Entonces los siguientes argumentos son equivalentes.

- a) Todas las soluciones tienden a cero.
- b) $-A + \int_0^\infty D(t)dt < 0$.
- c) Cada una de las soluciones es $L^1[0, \infty)$.
- d) La solución cero es (EAU)
- e) La solución cero es (EA)

Prueba

- a) Supóngase que a) se cumple pero $-A + \int_0^{t_0} D(t)dt > 0$. Si se escoge un t_0 lo suficientemente grande de manera que

$$\int_0^\infty D(t)dt > A$$

⁸³ Ver Teorema 2.6.2 en Burton, T.A. "Volterra Integral and Differential equations. Department of mathematics Southern Illinois University Carbondale, Illinois. Second Edition. El Sevier 2005.

y además $\phi(t) \equiv 2$ en $[0, t_0]$. Exigimos que $x(t, \phi) > 1$ en $[t_0, \infty]$. Si lo anterior no sucede, entonces para t_1 con $x(t_1) = 1$ la solución $x(t)$ tiende a cero y por lo tanto $x'(t_1) \leq 0$. Al sustituir en (3.119) $x(t_1) = 1$

$$\begin{aligned} x'(t_1) &= -Ax(t_1) + \int_0^{t_1} D(t_1 - s)x(s)ds \\ x'(t_1) &= -A + \int_0^{t_1} D(s)x(t_1 - s)ds \\ &\geq -A + \int_0^{t_1} D(s)ds \\ &> -A + \int_0^{t_0} D(s)ds > 0 \end{aligned}$$

El resultado es contradictorio. Así a) implica b).

b) Sea

$$V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$$

una función escalar, con primeras derivadas parciales continuas para toda x . $V(t, x)$ es una función fuerte de Lyapunov para (3.119) si localmente es positiva definida, esto es, $V(0) = 0$ y $V(t, x) > 0$ y $\dot{V}(t, x) < 0$ (la derivada euleriana)⁸⁴ es localmente definida negativa $\forall x \in B_\varepsilon(0)$. Si existe una función fuerte de Lyapunov para (3.119) entonces la solución cero es asintóticamente estable, en otras palabras cada solución es $L^1[0, \infty)$. Definimos la función candidata a Lyapunov como

$$V(t, x(\cdot)) = |x| + \int_0^t \int_t^\infty D(u - s)du |x(s)| ds$$

Si $x(t)$ es solución de (3.119), entonces $V(t, x)$ es definida positiva por lo que

$$\begin{aligned} V'(t, x(\cdot)) &= 1 + \int_t^\infty D(u - t)du |x(t)| - \int_0^t D(t - s)|x(s)| ds \\ V'(t, x(\cdot)) &\leq -A|x| + \int_t^\infty D(u - t)du |x(t)| - \int_0^t D(t - s)|x(s)| ds + \int_0^t D(t - s)|x(s)| ds \end{aligned}$$

⁸⁴ $\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$ que es la derivada de $V(t, x)$ a lo largo de las soluciones $x(t)$

Suponiendo que $0 < -A|x| + \int_0^t D(t-s)|x(s)|ds$,

$$V'(t, x(\cdot)) = \left[-A + \int_t^\infty D(u-t)du \right] |x(t)|$$

$$V'(t, x(\cdot)) = \left[-A + \int_0^\infty D(u)du \right] |x(t)|$$

Si $-\alpha = -A + \int_0^\infty D(u)du$, $\alpha > 0$

$$V'(t, x(\cdot)) = -\alpha|x(t)|$$

al integrar

$$0 \leq V'(t, x(\cdot)) \leq V(t_0, \phi) - \alpha \int_{t_0}^t |x(s)|ds$$

Lo cual prueba que b) implica c). Del **Teorema 3.2.3.4.** y la desigualdad de Hölder c) implica d) y la estabilidad asintótica uniforme implica estabilidad asintótica por lo tanto d) implica e) y la prueba está completada.

Finalizamos el capítulo dirigiendo nuestra atención hacia dos asuntos. El primero se refiere a la estabilidad asintótica de tipo exponencial. La cuestión es como sigue. Si se ha demostrado que la solución cero de (3.119) es estable asintóticamente uniforme (EAU) ¿Esto siempre implica que es asintótica de tipo exponencial (ExAE)?⁸⁵ Murakami⁸⁶ propone tres teoremas para responder dicho planteamiento en base al análisis de una EIDV como (3.119).

Teorema 3.2.3.6. (Murakami 1) Supóngase que

$$\int_0^\infty |D(t)|e^{\gamma t} dt < \infty \quad (3.120)$$

para la constante $\gamma > 0$. Si la solución cero de (3.119) es EAU, entonces es ExAE.

⁸⁵ Appleby D.A. John y Reynolds W. David, Subexponential solutions of linear integro-differential equations and transient renewal equations. Proceedings of the Royal Society Edinburgh, 132 A, 512-543, 2002. El problema fue planteado originalmente por Corduneanu, C. y Lakshmikantham, V. Equation with unbounded delay: a survey, Nonlinear Analysis 4, 831-877, 1980.

⁸⁶ Murakami Satoru, Exponential asymptotic stability of scalar linear Volterra equations, Differential Integral Equations 4, 519-525, 1991.

Teorema 3.2.3.6. (Murakami 2) Supóngase que $D(t) \in L^1[0, \infty)$ y que no cambia de signo en $[0, \infty)$. Si $|X(t)| \leq Ke^{\alpha t}$, $t \in [0, \infty)$ para algunas constantes positivas K y α , entonces existe una constante $\gamma > 0$ tal que (3.120) se cumple.

Teorema 3.2.3.7. (Murakami 3) Supóngase que $D(t) \in L^1[0, \infty)$ y que no cambia de signo en $[0, \infty)$. la solución cero de (3.119) es EAU, entonces los siguientes tres argumentos son equivalentes

- i) La solución cero de (3.119) es ExAE;
- ii) $|X(t)| \leq Ke^{\alpha t}$, $t \geq 0$, para algunas constantes positivas K y α ;
- iii) $\int_0^{\infty} |D(t)| e^{\gamma t} dt < \infty$ para la constante positiva $\gamma > 0$.

El segundo asunto es considerar cuando el inciso b) del **Teorema 3.2.3.5.** y el inciso iii) del **Teorema 3.2.3.7.** no se cumplen. Al considerar tales alternativas completaremos tales teoremas y concentraremos los resultados más importantes para facilitar su aplicación.

De acuerdo a Appleby y Reynolds existe amplia literatura⁸⁷ que estudia el comportamiento asintótico de las soluciones de una EIDV como (3.119)

$$x'(t) = -Ax(t) + \int_0^t D(t-s)x(s)ds$$

una ecuación escalar de tipo convolución. Si se supone que $A > 0$ y $D(t)$ continua, integrable y positiva, se dice que $x(t)$ es C^n y no cambia de signo. En tal caso si

$$A > \int_0^{\infty} D(t)dt$$

los siguientes argumentos se pueden sustentar (Appleby et al.) (teorema 2.6.2 Burton) (**Teorema 3.2.3.5.**)

- i) Cada solución $x(t)$ de (3.119) converge a cero como $t \rightarrow \infty$.
- ii) Cada solución $x(t)$ de (3.119) está en $L^1[0, \infty)$.
- iii) La solución $x(t) \equiv 0$ de (3.119) es EA
- iv) La solución $x(t) \equiv 0$ de (3.119) es EAU

En el **Teorema 3.2.3.5.** si se cumple la condición

$$-A + \int_0^{\infty} D(t)dt < 0$$

⁸⁷ Los trabajos aquí citados y sus respectivas bibliografías son una muestra de ello.

a) implica b) y la solución cero de (3.119) es EAU. Pero se llega a una contradicción cuando a) implica b) si

$$-A + \int_0^{\infty} D(t) dt > 0$$

puesto que solo se cumple si las soluciones de (3.119) $x(t) \rightarrow \infty$ exponencialmente conforme $t \rightarrow \infty$. Las soluciones no convergen. Para el caso donde

$$A = \int_0^{\infty} D(t) dt$$

La propuesta es como sigue. Si a cada $t \in [0, \infty)$ se asocia $tD(t)$, tal que si $f : t \mapsto tD(t)$ es integrable en $[0, \infty)$ entonces la solución cero es EU pero no EAU. Si por el contrario $f : t \mapsto tD(t)$ no es integrable, la solución cero es EA pero no EAU. Podemos ahora resumir lo referente al comportamiento de (3.119):

Teorema 3.2.3.8.

Sea $D(t)$ el kernel en (3.119) una función positiva, continua e integrable, esto es, $D(t) \in L^1[0, \infty)$, entonces si

a) $-A + \int_0^{\infty} D(t) dt < 0$, cada solución $x(t)$ de (3.119) converge, $x(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$ (Burton Teoremas 2.6.1 y 2.6.2.).

b) $-A + \int_0^{\infty} D(t) dt > 0$, cada solución $x(t)$ de (3.119) diverge, $x(t) \rightarrow \infty$ exponencialmente como $t \rightarrow \infty$.

c) $A = \int_0^{\infty} D(t) dt$, cada solución $x(t)$ de (3.119):

- Es EU si $f : t \mapsto tD(t)$ es integrable y
- Es EA si $f : t \mapsto tD(t)$ no es integrable.

Corolario 1. La solución $x(t) \equiv 0$ de (3.119) es ExAE, si se cumple la condición (necesaria y suficiente)

$$\int_0^{\infty} |D(t)| e^{\gamma t} dt < \infty$$

para alguna constante $\gamma > 0$. Esta es la condición de decaimiento exponencial y $D(t) \in L^1[0, \infty)$ es exponencialmente integrable si la condición se cumple⁸⁸.

Corolario 2. Si ahora, $D(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$ tan lentamente que se viola la condición del Corolario anterior, esto es, ¿Cual es la tasa de convergencia para que $x(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$ cuando $D(t)$ ya no es exponencialmente integrable. La tasa de convergencia (Appleby et al Teoremas 6.2 y 6.3) propuesta es la siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{D(t)} = \frac{x(0)}{\left[A - \int_0^{\infty} D(t) dt \right]^2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{x(t)} = 0$$

$x(t)$ no converge a cero más rápido que $D(t)$. El kernel $D(t)$ no es exponencialmente integrable. Este pertenece a la clase de funciones subexponenciales⁸⁹ las cuales satisfacen entre otras condiciones $D(t)e^{\gamma t} \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \infty$ para cada $\gamma > 0$. Por lo tanto la condición de decaimiento exponencial (Corolario 1) no se sostiene y la solución cero de (3.119) no es ExAE.

⁸⁸ Appleby D.A. John y Reynolds W. David, *On the non-exponential convergence of asymptotically stable solutions of linear scalar Volterra integro-differential equations*. Journal of integral equations and applications, volume 14, number 2, summer 2002

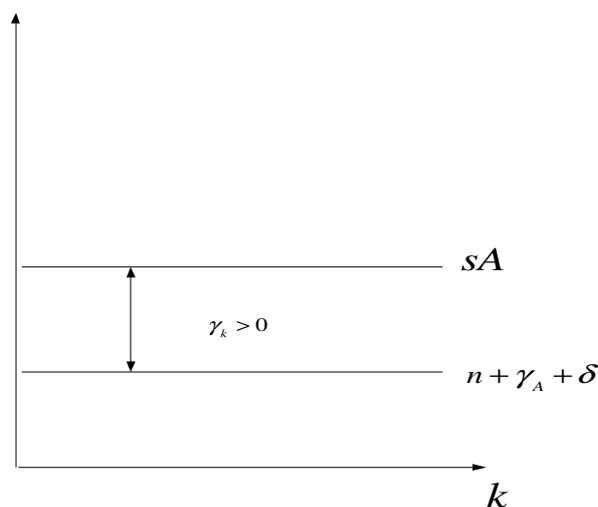
⁸⁹ Ver apéndice para algunos detalles acerca de estas funciones.

Solución al modelo $\hat{A}kp$

4.1. Introducción

Los modelos de crecimiento endógeno se caracterizan principalmente por observar rendimientos al menos no decrecientes del capital en el largo plazo. (ver Barro pg 40-41). El más elemental de tales modelos es cuando $Y = AK$ donde el producto medio y el producto marginal por trabajador son igual a la constante A . Este hecho significa que la tasa de crecimiento para cualquier nivel de k , es $\gamma_k = sA - [n + \delta]$. Es el caso de la ecuación (1.10), en el largo plazo el producto per cápita puede crecer a pesar de que no exista (cualquiera que sea la razón) progreso técnico exógeno: $\gamma_A = 0$. La ausencia de retornos decrecientes del capital es la propiedad fundamental de los modelos de crecimiento endógeno. Para algunos economistas se explica si se amplía el concepto de capital para incluir el capital humano⁹⁰. La distancia entre las paralelas sA y $[n + \delta]$ del gráfico 4.1 representa la tasa de crecimiento del capital, γ_k .

Gráfico 4.1



Si consideramos el caso $sA > [n + \delta]$ la tasa de crecimiento del capital es positiva y constante a cualquier nivel de k . De acuerdo a esto, la tasa de crecimiento de equilibrio γ_k^* es igual a γ_k para cualquier nivel de k , $\gamma_k = \gamma_k^*$. Si definimos el consumo per cápita como $c = (1 - s)y$, encontramos que $\gamma_c^* = \gamma_k^*$. De igual manera $\gamma_y = \gamma_k$ para todo $t \in [0, \infty)$ debido a que el producto per cápita es $y = Ak$. De esta forma el producto, el capital y el consumo per cápita crecen a la

⁹⁰ Frank Knight (1944)

misma tasa $\gamma = \gamma^* = sA - [n + \delta]$. La tasa de crecimiento de la economía depende de las variables exógenas. Por ejemplo, al elevar la tasa de ahorro o el nivel de tecnología A , aumenta γ^* permanentemente. El incremento poblacional n o subir la tasa de depreciación δ llevan a un efecto contrario y permanente en γ^* . Contrario al modelo de Solow, el modelo AK no exhibe la propiedad de convergencia absoluta ni condicional, lo que se traduce en $\partial\gamma_y/\partial y = 0$ para todo $t \in [0, \infty)$. Este resultado es la principal crítica al modelo pues la evidencia empírica a favor de la convergencia condicional es importante (tabla 1.2.). Nuestro análisis final se refiere al estudio de la convergencia cuando la tecnología (número de patentes) es modelada por la ecuación (2.2).

Antes de pasar a lo referente a la convergencia consideremos nuevamente las funciones de producción de bienes y conocimiento consideradas en el capítulo 2⁹¹

$$Y(t) = [p(t)K(t)]^\alpha [AL]^{1-\alpha}$$

$$A = B[p(t)K_{ID}(t)]^\phi, \quad B > 0$$

La función de producción toma la forma

$$Y(t) = \hat{A}L^{1-\alpha} (pK)^\alpha (pK_{ID})^{\phi(1-\alpha)} \quad (4.1)$$

y $\hat{A} = B^{1-\alpha}$. Al reescribir la función en términos per cápita por dividir entre L

$$y(t) = \hat{A}k^\alpha p^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \frac{K_{ID}^{\phi(1-\alpha)}}{L} \quad (4.2)$$

Ahora si $K_{ID} = K$ como en el caso de Romer (1986)

$$y(t) = \hat{A}(pk)^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \quad (4.3)$$

Si la acumulación de capital es de acuerdo a⁹²

$$\dot{K} = sY(t) - \delta K(t) \quad s > 0, \quad \delta > 0 \quad (4.4)$$

Podemos considerar la fundamental de Solow (4.4) en términos per cápita con crecimiento poblacional y depreciación (ecuación (1.10))

$$\dot{k} = sf(k) - [n + \delta]k \quad (4.5)$$

⁹¹ B es una constante positiva, que representa desplazamiento en la función de conocimiento

⁹² Es el mismo caso que en el modelo de Solow de un solo sector de la economía el producto producido se puede usar ya sea para consumo o inversión. Si $\dot{K} = Y - C$ y definimos el consumo total de la economía como $C = (1-s)Y + \delta K$. Ver Rogers, Mark, *Knowledge, technological catch-up and economic growth*, Harris Manchester College, University of Oxford, Edward Elgar, 2003.

Al sustituir la ecuación (4.3) y dividir por k

$$\begin{aligned}\gamma_k &= s \frac{f(k)}{k} - [n + \delta] \\ \gamma_k &= \frac{\dot{k}}{k} = s \hat{A} k^{-[\alpha + \phi(1 - \alpha)]} p^{\alpha + \phi(1 - \alpha)} - [n + \delta]\end{aligned}\quad (4.6)$$

Por otro lado $f'(k)$ es

$$f'(k) = [\alpha + \phi(1 - \alpha)] \hat{A} k^{-[\alpha + \phi(1 - \alpha)]} p^{\alpha + \phi(1 - \alpha)} \quad (4.7)$$

Así $f(k)/k = f'(k)/[\alpha + \phi(1 - \alpha)]$. Hablaremos de crecimiento estable si la tasa de crecimiento asociada γ_k^* es constante. Si esta tasa es positiva hablamos que el capital por trabajador no está acotado⁹³. Sencillamente para que γ_k^* sea positiva cuando $k \rightarrow \infty$

$$f(k)/k = \hat{A} k^{-[\alpha + \phi(1 - \alpha)]} p^{\alpha + \phi(1 - \alpha)} > [n + \delta]1/s \quad (4.7')$$

La ecuación del lado izquierdo es el producto medio, si el límite existe, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'(k)}{[\alpha + \phi(1 - \alpha)]} > \frac{1}{s} [n + \delta] \quad (4.8)$$

Podemos decir que la desigualdad anterior es condición necesaria y suficiente para que el modelo muestre crecimiento endógeno de estado estable. Existen dos variables a considerar en este análisis de estabilidad. La primera es el valor de ϕ . Asumimos que es mayor a cero. La otra variable es $p(t)$. Recordemos que está definida mediante la ecuación integro-diferencial

$$\dot{p}(t) = -ap(t) + \int_0^t H(t - \tau) p(\tau) d\tau \quad a > 0 \quad (2.2)$$

Que refleja la influencia del conocimiento pasado en la creación de nuevo conocimiento (patentes). El kernel $H(t - \tau)$ puede ser el capital $K(t)$, una constante o simplemente la tasa de descuento a valor presente de la trayectoria en el tiempo de las patentes, e^{-Rt} . Comencemos con el estudio de la convergencia.

4.2. Transición hacia la convergencia cuando $p(t) \equiv C$

Empecemos por considerar que $\phi < 1$ y p es constante. Dado que

$$\frac{f(k)}{k} = \frac{f'(k)}{[\alpha + \phi(1 - \alpha)]} = \hat{A} k^{-[\alpha + \phi(1 - \alpha)]} p^{\alpha + \phi(1 - \alpha)}$$

⁹³, R.J. y Sala-i-Martin, X., *Economic Growth*, Boston: MIT Press, 1999. pp 41
93

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'(k)}{[\alpha + \phi(1-\alpha)]} = 0 \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'(k)}{[\alpha + \phi(1-\alpha)]} = \infty \\ \gamma_k &= s \frac{f(k)}{k} - [n + \delta]\end{aligned}\quad (4.9)$$

Este primer resultado es el del modelo de Solow . Por supuesto no se violan las condiciones de Inada⁹⁴ . Existe convergencia absoluta o relativa, puesto que se cumple la ecuación (1.15'), $\partial \gamma_k / \partial k < 0$. Valores pequeños de k , corresponden con mayores valores de γ_k . Como $\gamma_y = \gamma_c = [\alpha + \phi(1-\alpha)]\gamma_k$ el análisis de γ_y y γ_c es idéntico. El siguiente caso es cuando $\phi = 1$ y p es constante.

Como $\frac{f(k)}{k} = f'(k) = \hat{A}p$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = \hat{A}p > 0 \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \hat{A}p > 0 \\ \gamma_k &= s\hat{A}p - [n + \delta]\end{aligned}\quad (4.10)$$

Como en el modelo AK se violan las condiciones de Inada. Existe crecimiento endógeno de estado estable⁹⁵ , sin embargo no se observa convergencia ni absoluta ni condicional como en el modelo neoclásico. La propiedad de convergencia se deriva de que se mantenga la relación inversa entre $f(k)/k$ y k lo cual no sucede aquí. Si $\hat{A}p > [n + \delta]$ (la tasa de crecimiento para k es positiva para toda k) entonces k crece a una tasa de estado estable dada por $s\hat{A}p - [n + \delta]$. Por último el caso cuando $\phi > 1$ y p es constante.

Como $\frac{f(k)}{k} = \frac{f'(k)}{[\alpha + \phi(1-\alpha)]} = \hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]} p^{\alpha+\phi(1-\alpha)}$, entonces

⁹⁴ Si $\phi < 1$ entonces $1 - (\alpha + \phi(1-\alpha)) > 0$

⁹⁵ Se cumple la condición necesaria y suficiente $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} > \frac{1}{s} \left([n + \delta] - \frac{c}{k} \right)$

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'(k)}{[\alpha + \phi(1 - \alpha)]} = \infty \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'(k)}{[\alpha + \phi(1 - \alpha)]} = 0 \\ \gamma_k &= s \frac{f(k)}{k} - [n + \delta]\end{aligned}\tag{4.11}$$

Este resultado también viola las condiciones de Inada. No hay convergencia. El crecimiento es explosivo. La tasa de crecimiento del capital guarda una relación positiva con el capital de manera que $\partial \gamma_k / \partial k > 0$. Un caso particular merece nuestra atención. Bajo el supuesto inicial de que p es constante, retomamos la ecuación (2.2) suponiendo que el kernel es el capital $K(t)$. Por la propiedad conmutativa de la convolución, tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -ap(t) + \int_0^t p(t - \tau)K(\tau)d\tau \\ 0 &= -a\bar{p} + \int_0^t \bar{p}K(\tau)d\tau \\ a &= \int_0^t K(\tau)d\tau\end{aligned}\tag{4.12}$$

Al aplicar la transformada de Laplace y resolver para el capital ($K(s)$ es la transformada de Laplace de $K(\tau)$)

$$a = K(s)\tag{4.13}$$

la correspondiente inversa de la transformada de Laplace es

$$\begin{aligned}L^{-1}[K(s)] &= aL^{-1}[1] \\ \frac{K(t)}{a} &= \delta(t)\end{aligned}\tag{4.14}$$

La transformada inversa de (4.13) es la delta de Dirac definida como

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty, & t = 0 \end{cases}\tag{4.15}$$

La delta de Dirac⁹⁶ no es una función en el sentido en que se define en los libros de cálculo. Esta pertenece a una clase conocida como funciones generalizadas⁹⁷.

⁹⁶ En *Principios de Mecánica Cuántica* publicado en 1930 el premio Nobel de física Paul Adrien Maurice Dirac introdujo la delta de Dirac.

⁹⁷ Dadas las características especiales de la delta de Dirac y que es importante para los resultados de esta investigación creemos conveniente para quien no conozca algunas de sus propiedades consultar la obra citada en la nota anterior capítulo III, sección 15. En el apéndice C hacemos una revisión elemental de sus propiedades.

Asumir que no hay cambio tecnológico en nuestro caso significa que el número de patentes es constante para un periodo de tiempo en la economía. Este supuesto neoclásico tiene un resultado diferente en nuestro modelo. Vemos que ante una trayectoria de patentes constante, esto es, la simple reproducción de conocimiento, el capital involucrado en la producción de conocimiento es un enorme impulso en el periodo inicial $t=0$ y nulo en el resto del periodo. Este resultado revela la relación entre la tecnología (número de patentes) y el capital cuando la primera es modelada como (2.2). Esta es la gran falla en el modelo neoclásico de competencia perfecta: el capital es cualitativamente heterogéneo y no existe relación con el nivel de tecnología pues esta se supone fija y exógena. Volviendo a (4.14) y de acuerdo a la definición en (4.15), la delta de Dirac se define

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, \lim_{a \rightarrow 0} \frac{K(0)}{a}, & t = 0 \end{cases}$$

El caso particular donde el cambio tecnológico consiste en reproducir lo alcanzado en el periodo anterior obliga a invertir una gran cantidad de capital si se busca incrementar el producto per cápita. De acuerdo a otra de las propiedades de la Delta de Dirac

$$p(t)\delta(t-t_0) = p(t_0)\delta(t-t_0)$$

Debemos considerar el mismo análisis para el caso donde p no es constante. Nuevamente consideraremos las ecuaciones (4.1) a (4.8) y (2.2) para estudiar la dinámica de transición.

4.3. Transición hacia la convergencia cuando $p \equiv p(t)$

Empecemos por considerar que $\phi < 1$.

4.4. El análisis óptimo neoclásico: el hamiltoniano

El problema del planeador social para obtener la tasa a la que crece la economía es el siguiente.

$$\begin{aligned} \max \int_0^{\infty} u(c)e^{-\rho t} dt; \quad u(c) &= \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \\ \text{s.a.} \quad \dot{k} &= f(k) - (n + \delta)k - c, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Escribimos el hamiltoniano⁹⁸ (ecuación [23] de sección 2.2.1) de la siguiente manera

$$H = u(c)e^{-\rho t} + \lambda[f(k) - (n + \delta)k - c] \quad (4.14)$$

⁹⁸ En el modelo de Ramsey el presupuesto restringido para los hogares es $\dot{a} = w + ra - c - na$, donde $w + ra$ es el ingreso, c es el consumo y na la expansión poblacional. Lo anterior significa que la variación en las dotaciones iniciales a es igual al ingreso laboral más el ingreso financiero menos el consumo y menos la demanda poblacional. Barro, R.J. y Sala-i-Martin, X., *Economic Growth*, Boston: MIT Press, 1999. pp. 62.

Las condiciones de primer orden arrojan

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\dot{c}}{c} = \theta^{-1}[f'(k) - (n + \delta) - \rho] \quad (4.15)$$

Si $r = f'(k)$, entonces [15] es ahora

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\dot{c}}{c} = \theta^{-1}[r - (n + \delta) - \rho] \quad (4.16)$$

Para $f(k) = \hat{A}(pk)^{\alpha + \phi(1 - \alpha)}$

$$\frac{f(k)}{k} = \frac{f'(k)}{\alpha + \phi(1 - \alpha)}$$

$$\frac{f(k)}{k} = \frac{r}{\alpha + \phi(1 - \alpha)}$$

De acuerdo a lo anterior reescribimos las tasas de crecimiento

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\dot{c}}{c} = \theta^{-1}[r - (n + \delta) - \rho] \quad (4.17)$$

$$\dot{\gamma}_k = \frac{\dot{k}}{k} = \left[\frac{r}{\alpha + \phi(1 - \alpha)} - (n + \delta) - \frac{c}{k} \right]$$

De (4.17) nuevamente observamos que $\phi = 1$ es congruente con nuestra propuesta. Siendo así

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\dot{c}}{c} = \theta^{-1}[r - (n + \delta) - \rho] \quad (4.18)$$

$$\dot{\gamma}_k = \frac{\dot{k}}{k} = \left[r - (n + \delta) - \frac{c}{k} \right]$$

Y las condiciones de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[k(t) \text{Exp} \left(- \int_0^t [r - (n + \delta)] dv \right) \right] = 0 \quad (4.19)$$

Ahora para observar si existe transición dinámica buscamos la tasa de crecimiento de estado estable, para el caso con rendimientos a escala constantes ($\phi = 1$). Se trata ahora de observar el comportamiento de $p(t)$ la segunda variable del análisis de estabilidad de nuestro modelo. Donde $p(t)$ es la solución de una ecuación integro-diferencial. Dicha solución si tiende a cero violaría las condiciones de Inada en los 3 casos anteriormente vistos. Lo mismo si tiende a infinito. El caso de un valor constante como lo hemos supuesto no observa convergencia ni

absoluta ni condicional para rendimientos constantes. A continuación veremos los dos casos posibles: cuando $p \equiv \text{constante}$ y cuando p es función del tiempo.

Para $p \equiv \text{constante}$, $f(k) = \hat{A}k\bar{p}$ es el modelo AK y $f'(k) = \hat{A}\bar{p}$, las condiciones de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[k(t) \text{Exp} \left[-(\hat{A}\bar{p} - (n + \delta))t \right] \right] = 0 \quad (4.20)$$

Y de la ecuación [18] resolvemos para c

$$c = c(0) \text{Exp} \frac{1}{\theta} [\hat{A}\bar{p} - (n + \delta) - \rho]t \quad (4.21)$$

Al sustituir (4.21) en \dot{k} ⁹⁹

$$\dot{k} = f(k) - (n + \delta)k - c(0) \text{Exp} \frac{1}{\theta} [\hat{A}\bar{p} - (n + \delta) - \rho]t \quad (4.22)$$

Cuando resolvemos para k

$$k = \frac{c(0)}{\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) [\hat{A}\bar{p} - (n + \delta)] - \frac{\rho}{\theta}} \text{Exp} \frac{1}{\theta} [\hat{A}\bar{p} - (n + \delta) - \rho]t + C \text{Exp} \frac{1}{\theta} [\hat{A}\bar{p} - (n + \delta)]t$$

Al sustituir ahora en las condiciones de transversalidad (ecuación (4.20))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[c(0)e^{-\psi t} + C \right] = 0 \quad (4.23)$$

donde $\psi = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) [\hat{A}\bar{p} - (n + \delta)] - \frac{\rho}{\theta}$. Las condiciones se cumplen si $C = 0$. Volviendo a k al sustituir [21] y $C = 0$

$$k(t) = \frac{c(t)}{\psi} \quad (4.24)$$

De lo anterior es fácil deducir que $\gamma_c = \gamma_k = \gamma_y$ lo que significa que no hay dinámica de transición hacia la convergencia. Las variables ingreso, capital per cápita crecen a la tasa constante $\gamma_c = \theta^{-1} [\hat{A}\bar{p} - (n + \delta) - \rho]$ desde sus valores iniciales y el modelo no exhibe convergencia. Dicho resultado solo difiere del modelo AK por la constante \bar{p} .

⁹⁹ Para encontrar la solución de esta ecuación diferencial utilizamos el método de variación de parámetros

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

- Aghion, P. y P. Howitt, "A model of growth through creative destruction". *Econometrica* 60, 1992
- Appleby D.A. John y Reynolds W. David, *On the non-exponential convergence of asymptotically stable solutions of linear scalar Volterra integro-differential equations* . Journal of integral equations and applications, volume 14, number 2, summer 2002
- Appleby D.A. John y Reynolds W. David, Subexponential solutions of linear integro-differential equations and transient renewal equations. Proceedings of the Royal Society Edinburgh, 132 A, 512-543, 2002.
- Apostol, T.M. "Análisis Matemático". Edit Reverté.1972.
- Atassi H. M. "Linear operators and linear equations" (class note). University Notre Dame. Department of Aerospace and mechanical engineering.
<http://www.nd.edu/~atassi/Teaching/ame60612/Notes/linop.pdf> (24 de Enero de 2011)
- Barro, R.J. y Sala-i-Martin, X., *Economic Growth* , Boston: MIT Press, 1999
- Bugrov, Ya. S. y Nikolsky S.M. Matemáticas Superiores. Editorial Mir. Moscú. 1985
- Burton, T.A. "Volterra Integral and Differential equations. Department of mathematics Southern Illinois University Carbondale, Illinois. Second Edition. El Sevier 2005.
- Corduneanu, C. y Lakshmikantham, V. Equation with unbounded delay: a survey, *Nonlinear Analysis* 4, 831-877, 1980
- Deakin, M. The development of the Laplace transform 1737-1937, I. Euler to Spitzer, 1737-1880. *Arch. Hist.* 1981
- Destinobles, Gerald A.: (2007) *Introducción a los modelos de crecimiento económico exógeno y endógeno*. Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/libros/2007a/243/ (17 marzo 2011)
- Dirac, Paul. *Principios de Mecánica Cuántica* 1930
- Funke, M y H. Strulik, "On endogenous growth with physical capital, human capital and product variety", *European Economic Review*, 44, 2000
- Goodner Dwight B. A converse to Lebesgue dominated convergence theorem. Florida State University. 1965
- Griliches, Z., Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth. *Bell Journal of Economics* 10, 1979

Grossman, G.M. y E. Helpman, *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, MA: MIT Press 1991.

Hazewinkel, Michiel. Integral Equations. Encyclopaedia of Mathematics Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2002. <http://eom.springer.de/I/i051400.htm> (11 de Enero 2011)

Hochstadt, Harry, *Integral equations*, John Wiley and Sons, Inc., USA, 1973

Moiseiwitsch, Benjamin Lawrence. Integral equation. Longman Mathematical Texts. 1977.

Lucas, R. E. On the Mechanics of Development Planning. *Journal of Monetary Economics* 22, 1988

Murakami Satoru, Exponential asymptotic stability of scalar linear Volterra equations, *Differential Integral Equations* 4 , 519 525, 1991.

Rebelo, S., “Long-Run Policy Analysis and the Long-Run Growth”. *Journal of Political Economy* 99, 3, 1991

Rogers, Mark, *Knowledge, technological catch-up and economic growth*, Harris Manchester College, University of Oxford, Edward Elgar, 2003.

Romer, P., Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy*, October, 1986.

Romer, P., “Endogenous technological change”, *Journal of Political Economy* 98

Toral Arto, Ma Amparo. “EL FACTOR ESPACIAL EN LA CONVERGENCIA DE LAS REGIONES DE LA UE: 1980-1996” Tesis doctoral Defendida el 10 de octubre de 2001